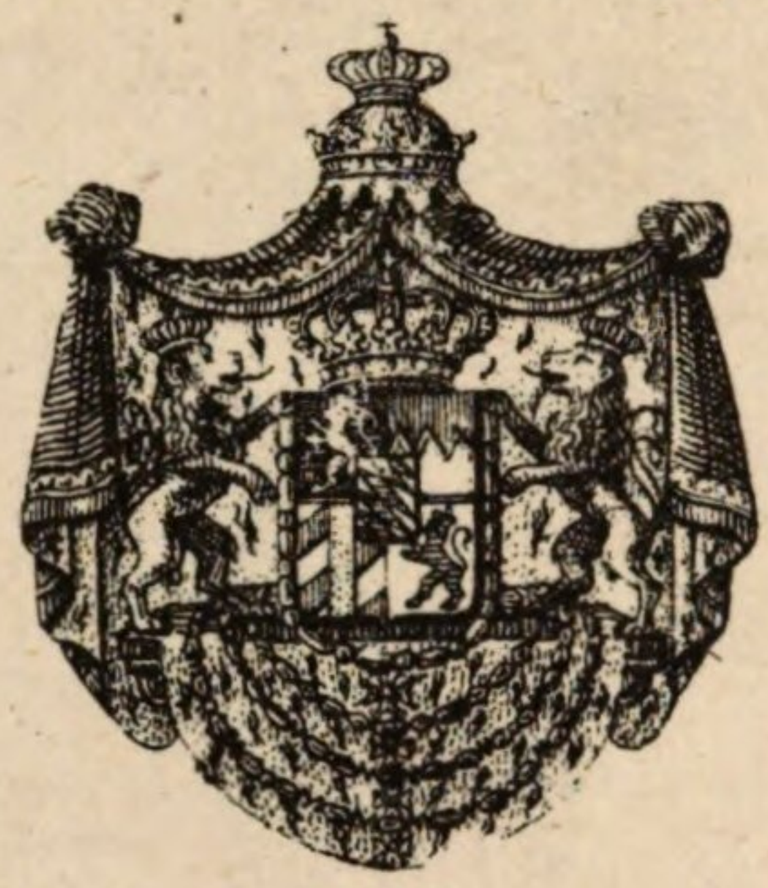
Math. 2°
2 r 9 kb

Hermann



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch

der

Arithmetik

und

Algebra

zum

Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht.

Von

Dr. Friedr. Bened. Wilh. von Hermann.

Zweite verbesserte Auflage.

Nürnberg,
bei Riegel und Wießner.
1845.

25 1/2 D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Der Unterricht in der Arithmetik an den Gymnasien setzt, wie der Unterricht in den Sprachen, eine elementarische Behandlung voraus, welche den Schüler mit dem Stoffe vertraut macht. Anschauliche Begründung der Zahlen, Verbindung und Vergleichung derselben, Betrachtung des getheilten Ganzen, Anwendung des Gewonnenen zur richtigen Auffassung der einfacheren Aufgaben des bürgerlichen Lebens ist Gegenstand des Unterrichts in der Vorbereitungsschule. Dieser Zweck läßt sich nur dadurch erreichen, daß der Schüler jede Form und Verbindung nicht nach einer vorausgegebenen Regel, sondern nach einer Reihe von Beispielen einübt, und es ist weit besser, der Schüler weiß auf dieser Stufe gar keine Regel, vermag aber jede einfache Aufgabe sogleich richtig zu behandeln, als wenn er ganze Hefte voll Regeln auswendig gelernt hat und doch ohne sogenannten Ansatz nichts zu rechnen versteht. Für das Gedeihen des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien ist sehr zu wünschen, daß der Unterricht im Rechnen in den Vorbereitungsschulen sorgfältiger betrieben werde, als gewöhnlich geschieht und daß die Lehrer an denselben sich den Sprachunterricht zum Vorbild nehmen,

der ebenfalls in den Elementen auf Gewandtheit im Gebrauch der Formen mehr als auf Auswendiglernen der Regeln hinarbeitet. Für diesen Unterricht kann man dem Schüler kein Buch in die Hand geben; es sei denn eine Aufgabensammlung, die aber auch ihre Nachtheile hat; er ist ganz an den Lehrer gewiesen und an den zweckmäßigen Gang, den dieser beim Unterricht geht.

Nach dieser Vorbereitung hat sodann der Unterricht im Gymnasium die Aufgabe, für die in Beispielen geläufigen Verbindungen, Lehrsätze und Regeln abzuleiten, diese mehr und mehr unter allgemeinere Gesichtspunkte zu fassen und in Zusammenhang zu bringen; sie auf Lösung verwickelter Aufgaben des Geschäftslebens anzuwenden und so auf der einen Seite eine sichere Grundlage für den strengwissenschaftlichen Unterricht der Hochschule, auf der andern eine brauchbare Vorbildung für das Leben zu geben. Auf dieser zweiten Stufe des Unterrichts bedarf der Schüler eines Buches, das ihm die Stelle der Schulgrammatik in den Sprachen vertritt; eine faßliche Darstellung der Hauptlehrsätze und ihrer Anwendung mit Andeutung des strengwissenschaftlichen Zusammenhangs. Jeder Satz muß in diesem eben sowohl durch seine Verbindung mit andern Sätzen, als durch eine hinreichende Anzahl von Beispielen klar sein, und überall muß eine Anzahl von Aufgaben den Schüler zur Uebung veranlassen, zureichende Fingerzeige für vorkommende schwierigere Fälle enthalten. Denn nur die kleinere Zahl der Schüler kommt dahin, das Ganze der Arithmetik im Zusammenhang zu überschauen, die meisten bleiben hier, wie in den Sprachen, auf der Stufe stehen, die einzelnen Sätze aus Beispielen sich zu erklären, und wieder in Beispielen auszudrücken; den Ueberblick vermögen sie höch-

stens über die einander näher liegenden Sätze zu gewinnen. Für beide Klassen der Schüler muß ein Lehrbuch der Arithmetik brauchbar sein, und es wird noch mehr Rücksicht auf die Mittelköpfe zu nehmen haben, als auf die seltenen vorzüglichen, da diesen ein Wink des Lehrers leicht weiter hilft.

Diese Bemerkungen enthalten die Grundsätze, welche mich bei Abfassung dieser Schrift leiteten, die Gesichtspunkte, von welchen aus dieselbe zu beurtheilen ist. Sie soll nicht eine Anweisung für den Lehrer, sondern ein Handbuch für den Schüler sein, das ihm zur Wiederholung und Erläuterung des Schulunterrichts dient, und über die wichtigsten Anwendungen eine hinreichende Anzahl von Aufgaben vorlegt. Ueberall suchte ich den Gegenstand so darzustellen, wie ich es nach vieljähriger sorgfältiger Beobachtung und nach vielfachen Versuchen am besten gefunden habe, und es hat mich die Erfahrung des letzten Jahres überzeugt, daß selbst Handwerksgesellen, die in Abendstunden den Unterricht der hiesigen technischen Schule neben ihrem Geschäft besuchen, wenn sie überhaupt hinreichende Ausdauer haben, durch die etwas strengere Lehrweise dieses Buches besser gefördert werden, als wenn ich mich mehr dem sogenannten practischen Bedürfniß derselben bequemte. Daß ich übrigens bei dem Unterricht nicht Blatt für Blatt des Buches verfolge, versteht sich fast von selbst. Vornehmlich finde ich es förderlich, vor der Lehre von den Potenzen ꝛc. die Gleichungen des ersten Grades vorzunehmen, theils damit durch den Gebrauch die gewonnenen Lehrsätze sich erläutern und befestigen, theils damit der Ermüdung des Schülers vorgebeugt werde, die bei allzulange dauernder rein theoretischer Betrachtung leicht eintritt.

Wissenschaftlich-Neues wird man in einem Schulbuche nicht suchen, doch dürfte ein und der andere Satz hier zum erstenmale aufgestellt sein, wie z. B. 67, 195, 3 ꝛc.

Das Kapitel über die Größe, ist ein Versuch, die Lücke auszufüllen, die in den Lehrbüchern an dieser Stelle sich findet; als solcher hofft er nachsichtige Beurtheilung.

Nürnberg, den 1. Juni 1826.

Bei dieser neuen Ausgabe habe ich nichts hinzuzufügen, als daß die Zweckmäßigkeit der Einrichtung dieses Schulbuchs sich mir durch das Zeugniß vieler Lehrer, die dasselbe benützten, bewährt hat, daher wesentliche Aenderungen in derselben nicht vorgenommen worden sind.

München, den 20. März 1845.

D. V.

Inhalt.

Seite.

Kap. I. Von der Größe 1

Kap. II. Arithmetik.

Abschn. I. Vom Numeriren 17

II. Vom Addiren und Subtrahiren . . 26

III. Vom Multipliciren 45

IV. Von der Division 59

V. Ueber Theilung und Messung der Zahlen 69

VI. Von den Brüchen.

§. 1. Von den gemeinen Brüchen . 82

§. 2. Von den Decimalbrüchen . 118

§. 3. Ueber Ketten- und Näherungsbrüche 125

VII. Ueberblick der Multiplication und Division 138

VIII. Rechnung mit benannten Zahlen . . 141

IX. Von den Verhältnissen . . . 160

X. Von den Potenzen 172

XI. Von den Wurzeln 186

XII. Allgemeine Lehrsätze von Potenzen und Wurzeln 203

XIII. Von den Logarithmen 216

Seite.

Kap. III. Algebra.

Abschn. I. Von den algebraischen Aufgaben im Allgemeinen 248

II. Von der Auflösung der Gleichungen mit einer Unbekannten 264

III. Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehr Unbekannten . . . 314

IV. Quadratische Gleichungen . . . 329

V. Exponentialgleichungen . . . 337

VI. Unbestimmte Aufgaben des ersten Grades 339

VII. Arithmetische Progressionen . . . 348

VIII. Von den Combinationen . . . 358

IX. Geometrische Progressionen . . . 374

X. Von Zinseszinsen, Renten ꝛc. . . 378

Erstes Kapitel.

Von der Größe.

§. 1.

Allgemeine Begriffe.

1) Mit dem Wort Größe bezeichnet man an verschiedenen Dingen verschiedene Eigenschaften, die sich jedoch alle unter einen Gesichtspunkt bringen lassen. So versteht man unter der Größe eines Stabes, eines Weges, eines Thurmes gemeiniglich nur die Erstreckung nach einer Seite hin (nach der Länge, oder Höhe), ohne die Breite und Dicke zugleich in's Auge zu fassen. Bei andern Körpern sieht man zwar auf die ganze Ausbreitung an der Oberfläche, läßt aber doch die Dicke oder Tiefe unberücksichtigt, z. B. wenn man von der Größe einer Tafel, eines Bogens Papier, einer Wand, eines Landes spricht. Noch andere Körper betrachtet man nach allen Seiten hin und denkt bei dem Wort Größe an den ganzen Raum, den sie einnehmen. Bei einem Hause, z. B., einem Gefäße, einem Schranke, hält man nicht bloß die Erstreckung nach einer Seite hin fest, wie beim Stabe, oder die Verbreitung nach zwei Richtungen, wie beim Brette, sondern hier heißt Größe die ganze Ausdehnung nach Länge, Breite und Dicke. Die Größe der Länge, der Fläche, des Körpers kommt darin überein, daß der Inhalt derselben angereiht, ausgebreitet, aufgeschichtet, wahrgenommen wird. Die Länge eines Fadens z. B., erscheint als Aneinanderreihung von Windungen; die Oberfläche eines Brettes als an- und nebeneinander gestellte Zellen und Fasern, in einem Sandsteine legen sich die Körner nicht bloß an- und nebeneinander, sondern sie sind auch über-

einander aufgeschichtet. Dabei kommt es nicht auf den Stoff an, in welchem die Größe sich darstellt. Denn dieselbe Größe legt man häufig Körpern von dem verschiedensten Stoffe bei. Man kann sich z. B. denselben Stab von Holz oder Metall, dieselbe Tafel von Stein oder Holz, dasselbe Gefäß von Glas oder Metall denken, ohne daß sich die Eigenschaft desselben ändert, welche man Größe heißt. Da also die Größe der Länge, der Fläche und des Körpers bloß auf die ununterbrochene, gleichmäßige (stetige) Ausdehnung derselben (Raum, den sie einnehmen) sich bezieht, so nennt man diese Art der Größe auch ausgedehnte Größe oder Raumgröße.

2) Eine zweite Art der Größe erzeugt sich dadurch, daß man die Dauer eines Dinges ununterbrochen verfolgen kann. In diesem Sinne spricht man von der Größe eines Tages, der Länge des Lebens eines Menschen, eines Thiers. Auch hier kommt es nicht auf das an, was dauert, sondern bloß auf die ununterbrochene, gleichmäßige Folge des Bestehens oder der Zustände, es mögen diese durch die Umdrehung der Erde um ihre Achse, wie im Tage, oder durch die Reihe der Zustände während des Lebens eines Menschen sich darstellen. Da man nun dieses ununterbrochene Aufeinanderfolgen Zeit nennt, so ist die zweite Art der Größe die Zeitgröße.

3) Von einer dritten Art der Größe ist die Rede, wenn man von der Größe eines Gewichts, eines Stoßes, Drucks, Zugs spricht. Hier hört man wohl auch von der Kraft sprechen, mit welcher gestoßen, gedrückt, gezogen werde. Und nicht bloß im Körperlichen werden Kräfte angeführt, sondern auch dem Geiste schreibt man größere oder geringere Kraft zu. Wie man aber von Kräften eines Körpers nur dann spricht, wenn aus demselben irgend eine Aenderung des Zustandes anderer Körper hervorgegangen ist, oder er irgend einen Einfluß auf andere Körper gehabt hat, wie z. B. ein Körper durch einen andern beim Stoß plötzlich, beim Druck allmählig aus seiner Lage gebracht wird, so erkennt man auch nur bei dem Menschen die Kraft des Geistes an, der lernen und Gedanken hervorbringen kann. Demnach ist also Kraft nichts, was mit den Sinnen erfaßt werden könnte, sondern etwas

Innerliches und Verborgenes, aus dem eine sichtbare Aenderung entspringt. Die Kraft ist eine Voraussetzung, die der Mensch zu machen gezwungen ist, sobald er den Dingen, die ihn umgeben, eine gewisse Selbstständigkeit beilegt. Denn wie im Menschen selbst Gefühle, Gedanken und Vorsätze hervorbrechen, die vorher völlig verborgen gewesen und bei welchen er nicht weiter zu zergliedern vermag, woraus sie entstehen, so nimmt er dann auch an, daß wenn ein Körper, ohne selbst von außen getrieben zu seyn, auf andere Körper einwirkt, dieß aus einem innern, unsichtbaren Zustande desselben hervorgehe. Diesen nicht weiter erklärbaren, verborgenen Anfang äußerer Veränderungen nennt man Kraft. Das Hervorgekommene heißt Wirkung der Kraft, die Kraft Ursache der Wirkung. An sich ist also die Kraft unfaßlich und es sind eigentlich nur die Aenderungen, die sich an den Dingen zutragen, mit welchen man es zu thun hat. Je bestimmter sich diese Aenderungen auffassen lassen, desto bestimmter erkennt man die Größe der Kraft.

4) Die vierte Art der Größe ist die Größe der Menge. Man sagt, die Rose bestehe aus einer Menge von Blumenblättern, das Rückgrat aus einer Menge von Wirbeln, das menschliche Gerippe aus einer Menge Knochen; die Haut des Karpfen sey mit einer großen Menge von Schuppen bedeckt; die teutsche Sprache habe eine große Menge von Wörtern. Aus diesen Beispielen erhellet, daß, wo irgend ein Ding wiederholt mit sich selbst verbunden vorkommt, man spricht, es sey in Menge vorhanden; und man ersieht zugleich, daß auf die jedesmalige Beschaffenheit des Dinges gar nichts ankomme, da die verschiedensten Dinge eine Menge bilden können.

5) Es tritt also bei der Mengengröße dasselbe ein, was wir bei der Raum-, Zeit- und Kraftgröße sahen, daß sie nämlich nicht von dem Stoff abhängt, in welchem sie sich darstellt, sondern daß man gerade von diesem absehen muß, um das, was Größe ist, zu begreifen. Thut man dieß, so findet man, daß in jeder der vier Arten der Größe ein in sich durchaus Gleichartiges aufzufassen ist, es mag nun dieses, wie bei

der Raumgröße, in gleichmäßiger Erstreckung, Verbreitung und Aufschichtung, oder, wie bei der Zeitgröße, in gleichmäßiger Dauer, oder, wie bei der Kraftgröße, in der Zusammendrängung einer gewissen, in sich gleichartigen Wirksamkeit an einem Orte, oder, wie bei der Mengengröße, in der Anreihung oder Verbindung eines und desselben Dinges an oder mit sich selbst bestehen.

§. 2.

Wie bestimmt man die Größe?

6) Nachdem man nun einsieht, was in der Größe aufzufassen ist, so entsteht die Frage, wie dieß geschehe? Niemand wird behaupten, die Größe eines Stabes zu kennen, bei dem er nicht wahrnimmt, wo er sich von andern Körpern trennt. Daß der Stab eine Größe habe, sieht er wohl, da eine gleichförmige Erstreckung ihm vorliegt; aber die Größe des Stabes kennt er erst dann, wenn er die Enden desselben sieht. So faßt man eine Fläche nur dadurch auf, daß man sie am Rande von allen andern Flächen abschneidet. Die Größe eines Körpers, indem man erkundet, wo er sich von allen andern Körpern ablös't. Der Größe der Zeit versichert man sich durch Anfang und Ende ihrer Dauer; der Größe einer Kraft, indem man ihre Wirkung allein festhält. Die Größe der Menge endlich bestimmt man, indem man die Dinge, die in ihr verbunden sind, überschaut und von allen gleichartigen absondert.

Demnach wird also jede Größe bestimmt durch Begränzung oder Absonderung von allem Gleichartigen, und man sieht ein, daß bei allen vier Arten der Größe ein in sich Gleichartiges in bestimmten Gränzen, oder mit genauer Absonderung von allem Gleichartigen, aufgefaßt wird.

§. 3.

Nähere Betrachtung der Gränzen.

7) Wo die Körper von andern sich ablösen, bilden sich Flächen; die Gränze der Körpergröße ist die Fläche.

Wo die Flächen sich von einander abwenden und absondern, entstehen Kanten, Linien. Die Gränze der Flächengröße ist die Linie. Wo Kanten oder Linien zusammentreffen, sieht man Ecken, Spitzen, Punkte. Die Gränze der Linien- oder Längengröße ist der Punkt. Der Punkt ist nicht selbst Größe, nur Ort, von wo die Ausdehnung ausgeht, wo sie geschlossen ist. Flächen, Linien, Punkte sind für sich allein kein Gegenstand der sinnlichen Darstellung; sie sind bloß an Körpern sichtbar und fühlbar. Die Fläche für sich allein gedacht ist ein Körper ohne Dicke: die Linie eine Fläche ohne Breite; der Punkt eine Linie ohne Länge. Papier, Blätter, Zeuche deuten nur auf jene Eigenschaft der Fläche an sich hin, ohne wirklich Flächen zu seyn; man könnte sie flächenähnliche Körper nennen; dann wären auf gleiche Weise Faden, Draht ꝛc. linienähnliche; Staub, Mehl punktähnliche Körper. Je näher diese jener bloß denkbaren Beschaffenheit der Fläche, der Linie und des Punktes kommen, desto besser dienen sie im Gebrauch statt der Flächen, Linien und Punkte selbst.

8) Anfang und Ende gewisser Aenderungen der Zustände der Dinge heben aus der stetigen Dauer, in der alle Dinge begriffen sind, eine Größe heraus, die Zeitgröße. Der Mensch wird an die Zeit nur erinnert durch das, was in ihr erfolgt. Je gleichförmiger sich dieß ereignet, desto bestimmter vermag er die Zeit aufzufassen. Am bestimmtesten geschieht dieß dann, wenn das, was sich in der Zeit erzeugt, eine Größe von bestimmtem Inhalt ist (ein in sich Gleichartiges, das sich begränzen läßt). Dieß ist der Fall bei den Wegen, welche die Gestirne zurücklegen, die daher von jeher den Menschen ein Mittel gewesen sind, die Zeit zu fassen. Auf gleiche Weise erzeugen die verschiedenen Uhren eine faßliche Größe, es mag dieß, wie bei der Räderuhr, eine Linie, oder, wie bei der Sanduhr, ein Körper seyn.

Eine zweite bestimmte Weise, sich der Zeit zu versichern, ist dann möglich, wenn eine bestimmbare Menge desselben Dinges in ihr gleichmäßig sich erzeugt. Daher läßt sich aus der bestimmten Menge der Schwingungen des Perpendikels einer

Uhr eben so richtig die Zeit erkennen, als aus dem Kreisbogen auf dem Zifferblatt, den der Zeiger zurücklegte. Es läßt sich also die Zeit nur entweder mittels Raum-, oder mittels Mengengrößen festhalten und begränzen.

9) Die Gränzen der Kraft an sich sind unfaßlich, wie die Kraft selbst; nur die Begränzung der Wirkung deutet die Begränzung der Kraft an. Nun kann aber die Wirkung der Kraft nur dann scharf begränzt und aufgefaßt werden, wenn sie eine Größe ist: es läuft also die Bestimmung einer Kraftgröße auf die einer Raum-, Zeit- oder Mengengröße zurück, welche als Wirkung der Kraft gedacht wird. Welche Wirkung einer Kraft man sich aber auch denken mag, immer ist in ihr eine Folge von Zuständen wahrnehmbar, d. h. sie geschieht in der Zeit, und diese Aenderung der Zustände selbst ist entweder eine Aenderung des Stoffes oder des Raumes, in welchem der Stoff sich darstellt, oder beider zugleich. Da aber die Folge der Aenderungen, oder die Zeit, nur aus den Aenderungen selbst, die sich in ihr zutragen, verständlich wird, so ist es bloß die Aenderung des Raumes (Bewegung), welche die Kraft hervorbringt oder der Menge des gleichartigen Einzelnen, die sich im Stoff verbindet, woran man sich bei Bestimmung der Kraftgröße zu halten hat.

10) Wie versichert man sich endlich der Mengengröße? Es wurde gesagt, daß man das in der Menge verbundene gleichartige Einzelne von allen gleichartigen absondern, und zugleich den Inhalt überschauen müsse? Wie geschieht dieses? Mit dem Einzelnen verbindet man dasselbe Einzelne, so hat man eine Menge, deren Inhalt faßlich ist. Benennt man sie mit einem besondern Namen, z. B. Zwei, so erinnert dieser stets an die bekannte Menge. Zu Zweien dasselbe Einzelne gibt eine faßliche Verbindung; besonders benannt läßt sich ihr Inhalt unter allen Mengen festhalten. Zu Dreien dasselbe Einzelne gibt eine faßliche Verbindung des Einzelnen, durch besondere Benennung hebt man sie aus allen Mengen heraus. Fährt man so fort, so stellen sich die Mengen selbst in eine Reihe, in welcher jede von der vorhergehenden und folgenden genau geschieden ist, und eben durch ihre Stelle ihren Inhalt

andeutet. Dieses Ordnen der Menge heißt Zählen. Eine bestimmte (mit Stimme, Wort, Benennung versehene) Menge, heißt Zahl. Eine Menge ist also bestimmt, wenn man sie zählt, d. h. wenn man aufsucht, an welcher Stelle in der Reihe aller denkbaren Mengen sie steht.

Hieraus erhellet, daß eigentlich nur die Raum- und Mengengröße an sich festgehalten und bestimmt aufgefaßt werden können. Zeit- und Kraftgrößen werden erst durch das bestimmt, was von ihnen abhängt. Denn bei der Zeit zeigt das, was in ihr erfolgt, bei der Kraft die Wirkung die Größe an.

Nennen wir nun diese andeutenden und hinweisenden Größen die abhängigen, so kann man sagen, die Größe der Zeit und Kraft sind aus den von ihnen abhängigen Größen zu erfassen.

Anmerkung. Die Raum- und Zeitgrößen nennt man wohl auch stetige Größen. Die Kraftgrößen intensive, die Raumgröße extensive Größe. Die Mengengröße auch discrete Größe.

§. 4.

11) Die zusammenhängende und geordnete Betrachtung der Größen heißt Mathematik.

Da nun nach dieser Ableitung bloß die Mengen- und Raumgröße unmittelbare Betrachtung zulassen, die Zeit- und Kraftgrößen aber nur mittels jener zu erkennen sind, die Abhängigkeit der Raum- und Mengengröße von Zeit und Kraft aber in der Bewegung erscheint, so gibt es eigentlich drei Theile der reinen Mathematik:

1) Mengengrößenlehre oder Arithmetik.
2) Raumgrößenlehre oder Geometrie.
3) Bewegungslehre oder Lehre von der Abhängigkeit der Raum- und Mengengröße von Kraft und Zeit.

Die Nachweisung und Anerkennung der in diesen drei Theilen aufgestellten Wahrheiten an wirklichen Dingen und die Benutzung derselben zu Aenderungen der wirklichen Dinge nach gewissen Gedanken, heißt dann Anwendung.

Anmerkung. Meist versteht man unter reiner Mathematik bloß Arithmetik und Geometrie.

§. 5.

Veränderung der Größe.

12) Die Größe jeder Art ist einer Veränderung fähig, ohne ihre Eigenthümlichkeit zu verlieren. Die meisten Körper, die den Menschen umgeben, verändern die Eigenschaft, die man ihre Größe heißt (worunter man nicht, wie im gemeinen Leben bloß Raumgröße verstehen muß), unter den Augen des Menschen. Der Luft und dem Regen ausgesetzt, verwittert der Stein, seine zusammenhaltende Kraft wird geschwächt, er nimmt nicht mehr seine vorige Ausdehnung ein, er zerfällt nach und nach, die Menge seines Inhaltes wird eine andere. Umgekehrt treiben die Kräfte der Stoffe, die in manchen Wassern bisher aufgelöst waren, dieser enger zusammen; sie verbinden sich allmählig zu einer Menge, die einen gewissen Raum einnimmt, z. B. Tropfsteine ꝛc. Die zermalmende Kraft des Felsstücks wächst durch den Sturz desselben; der innere Zusammenhang (Härte) des Eisens nimmt zu, wenn es zu Stahl geglüht wird; die Dehnkraft der zusammengedrückten Luft nimmt zu, durch den Druck. Umgekehrt: je weiter die abgeschossene Kugel fliegt, desto schwächer ist ihre Wirksamkeit; die Kraft des Schalles vermindert sich durch die Entfernung vom schallenden Körper. Das Samenkorn dehnt sich durch Aufnahme einer Menge Luft und Wasser nach und nach zum Baume aus; so bedarf das Thier einer Zeit, um durch innere Verarbeitung der Nahrung zu erwachsen ꝛc.

13) So manchfaltig auch diese Veränderungen der Dinge sind, so kommt doch die Manchfaltigkeit und scheinbare Umfaßlichkeit nur daher, daß überall in den wirklichen Dingen sich in einer Menge des Inhaltes Kräfte äußern, die in gewissen Zeiten gewisse Wirkungen hervorbringen, daß also hier Menge, Kraft, Zeit, Raum durch einander greifen, und so die Auffassung allerdings erschweren.

Hebt man aber die Veränderungen heraus, die in jeder Größe besonders geschehen können, so lassen sie sich auf zwei zurückführen. Sie sind entweder Verbindung oder Scheis

dung. Entweder sind Größen derselben Art in einer Größe zusammengefaßt, oder eine Größe scheidet sich in andere Größen. Das Erstere geschieht, indem gleichartige Größen eine gemeinschaftliche Gränze erhalten; das Letztere, indem innerhalb der bisherigen Gränze neue Gränzen entstehen.

14) Anmerkung. Der Mensch kann zwar nicht bloß die Verbindungen und Scheidungen der Größen in der Natur auffassen, sondern an vielen Dingen die Größe des Inhalts und des Raumes nach seinen Gedanken verändern. Hier soll aber nicht die wirkliche Veränderung der Außendinge, sondern die bloß denkbare Veränderung jeder Art der Größe betrachtet werden.

Wenn daher auch an Beispielen die behaupteten Sätze erläutert werden, so sollen doch nicht die Verbindungen der Außendinge selbst gemeint seyn, sondern diese mögen nur an die richtige Vorstellung erinnern. Denn da man bisher eingesehen hat, daß in den wirklichen Dingen die verschiedenen Arten der Größen nie so gesondert vorkommen, wie für die Betrachtung nöthig ist, so muß diese unabhängig von den Beispielen vor sich gehen.

§. 6.

Von der Verbindung und Scheidung der Größen.

15) Bei der Verbindung und Scheidung der Größen fallen die Gränzen einer Größe innerhalb der Gränzen einer andern; die Gränzen dieser umschließen die Gränzen der ersten. Die eine ist neben der andern umschlossenen in der umschließenden enthalten, oder macht deren Inhalt aus. Finden sich die Gränzen einer Größe inner den Gränzen einer andern, so heißt sie kleiner, als diese, diese größer, als jene. Eine Größe, die mit ihrer Gränze andere umschließt, heißt für die umschlossenen Ganzes, die umschlossenen Theile. Da die Begränzung und Absonderung der Größen von gleichartigen in jeder Art der Größen verschieden ist, so läßt sich das Gesagte in vielen Beispielen darstellen. So heißt die Fläche der Wandtafel kleiner, als die Fläche der Wand, an der sie hängt, eine Linie kleiner, als eine andere, ein Körper kleiner, als ein anderer, wenn die Gränzen des einen von denen des andern

umschlossen sind: Eine Kraft, eine Zeit, heißen kleiner, als eine andere, wenn die von der ersten abhängige Größe in der abhängigen Größe der andern enthalten ist. Eine Menge heißt kleiner, als die andere, wenn man über die erste fortzählen muß, um die andere zu erhalten.

16) Gleichartige Größen kann man ineinander denken. Sieht man dann auf die Gränzen derselben, so können zwei Fälle statt finden. Entweder lassen sich die Gränzen der einen Größe in den Größen der andern denken (die Gränzen fallen ineinander), oder die Gränzen der einen werden umschlossen von den Gränzen der andern. Lassen sich die Gränzen der einen Größe ganz in den Größen der andern denken, so ist die eine Größe nur eine Wiederholung der andern und heißt ihr gleich. Im andern Falle heißen die Größen ungleich; die eine größer, die andere kleiner; diese Theil, jene Ganzes. Kleiner als eine andere oder Theil einer andern Größe heißt also eine Größe, nicht bloß, wenn man die Gränzen der einen inner den Gränzen der andern bereits sieht, sondern wenn die Gränzen der einen inner den Gränzen der andern gedacht werden können. Beispiele. Eine Linie ist einer andern gleich, wenn ihre Endpunkte in die Endpunkte der andern gedacht werden können. Ein Stab ist einem andern gleich, wenn er, an den andern gehalten, dieselben Enden hat. Eine Fläche ist einer andern gleich, wenn sie, auf sie gelegt, dieselben Gränzen zeigt. Ein Körper ist gleich einem andern, wenn beide von denselben Flächen umschlossen werden. Z. B. In einem sogenannten leeren Gefäß ist ein eben so großer Luftkörper, als der volle Flüssigkeit enthält. Kräfte und Zeiten sind gleich, wenn ihre abhängigen Größen gleich sind. Z. B. Wenn eine stetig wirkende Kraft in zwei Zeiten denselben Körper gleich weit treibt, wie etwa die Schnellkraft zweier Uhrfedern gleich ist, wenn beide den Zeiger derselben Uhr in gleicher Zeit gleich weit treiben. Mengen sind gleich, wenn ihre Zahlen an derselben Stelle in der Reihe der bestimmten Zahlen stehen.

Unmittelbar aus der Verbindung dieser Sätze ergeben sich folgende Sätze:

17) Sind Größen einer Größe gleich, so sind sie auch unter sich gleich.

18) Ist eine Größe größer oder kleiner, als eine andere, so ist sie auch größer oder kleiner, als jede der letztern gleiche Größe.

19) Ist eine Größe größer als eine andere, diese größer, als eine dritte, so ist auch die erste größer, als die dritte.

20) Ist aber eine Größe kleiner, als die größere zweier Größen, so ist sie unbestimmt gegen die kleinere.

21) Denkt man Größen in gemeinschaftlicher Gränze, so hat man sie *summirt*, oder zu einander *addirt*. Die *verbundenen* heißen *Summanden*, die *entstandene Summe*.

Hieraus folgt sogleich:

22) Die Summe ist, den Summanden zusammen genommen, *gleich*.

23) Die Ordnung, in welcher man die Summanden verbindet, ist willkührlich.

24) Denkt man eine Größe in die andere und sieht man auf ihre Gränzen, so *vergleicht* man die eine mit der andern, d. h. man findet das, *was in beiden gleich ist*. Findet sich bei der Vergleichung eine Größe kleiner, als die andere, so ist neben der kleinern in der größern eine Größe enthalten, durch deren Verbindung mit der kleinern die größere entsteht (*Ergänzung*). Da man aus der Ergänzungsgröße die Ungleichheit der verglichenen Größen erkennt, so heißt sie auch der *Unterschied* derselben.

Hieraus folgt:

25) Der Unterschied ist kleiner, als die größere der verglichenen Größen.

26) Trägt man eine Größe in eine andere größere, so kann man sich den *Unterschied* als aus der größern mittels der kleinern erzeugt denken. Dann erscheint das Verfahren als ein *Verkleinern* der größern, ein *Heraus-* oder *Wegnehmen*, ein *Abziehen* (*Subtrahiren*) der kleinern von der größern.

In dieser Beziehung heißt der Unterschied auch Rest (was von der größern übrig geblieben), die zu vermindernde Größe Minuend, die wegzunehmende (Subtrahend).

Hieraus folgt:

27) Subtrahend und Rest summirt, geben den Minuenden.

28) Der Minuend weniger dem Rest gibt den Subtrahenden.

29) Von der Summe der eine Summand weggenommen, gibt den andern.

30) Demnach kann dieselbe Größe Summe und Minuend heißen, je nachdem sie aus andern erzeugt oder mit ihnen verbunden gedacht wird. Eben so geben die Benennungen Ergänzung, Summand, Subtrahend, Rest, Unterschied, nur verschiedene Beziehungen einer Größe zu andern an.

31) Anmerkung. Die Sprache hat fast eben so viel verschiedene Ausdrücke für die Bezeichnung der Addition und Subtraction, als sich Größen und Stoffe, in denen sie dargestellt werden, denken lassen. Beispiele sind: ansetzen, abschneiden, abbrechen, aufschichten, abheben, eingießen, ausgießen; erhellen, verdunkeln; erwärmen, erkälten; schwächen, verstärken; fortsetzen ꝛc., zu denen fast immer auch die übrigen Wortformen sich finden. Hier ist denn bei der Beurtheilung wirklicher Größen immer nur das Allgemeine herauszuheben, das in den besondern Benennungen ausgedrückt ist.

§. 7.

Von der Bezeichnung mathematischer Sätze.

32) Eine genauere Betrachtung der Sätze, die sich im vorigen §. über die Verbindung und Scheidung der Größen ergeben haben, lehrt, daß der Inhalt derselben sehr einfach ist. Immer ist das Subjekt Größe, das Prädicat Addiren oder Subtrahiren. Gleichwohl ist es gerade diese Einförmigkeit der Worte, welche die Auffassung wörtlich ausgesprochener Sätze erschwert, ihre Aufzeichnung verzögert. Wenn dieß auch hier noch nicht so fühlbar ist, so wird es dagegen desto

auffallender, je mehr sich bei fortgesetzter Betrachtung und Verbindung der Größe die Sätze verlängern und verwickeln. Man ist daher übereingekommen, zur Bezeichnung mathematischer Gedanken statt der Worte einzelne Zeichen zu gebrauchen, und schreibt also:

33) Für irgend eine Größe, eine zweite, dritte, ... irgend einen Buchstaben, einen zweiten, einen dritten, z. B. a, b, c.... oder A, B, C...., wo man denn, so lange von einer und derselben Größe die Rede ist, denselben Buchstaben beibehält.

34) Für gleich setzt man: $=$, so daß also $a = b$ eben so viel bedeutet, als: eine Größe ist einer andern gleich. Jeder Satz, der ausspricht, daß eine Größe einer andern gleich sey, ist eigentlich eine Gleichung. Im engern Sinne heißt man aber Gleichung nur eine Verbindung zweier Zeichen, welche dieselbe Größe bedeuten, durch das Zeichen $=$

35) Für unbestimmt, gleich oder ungleich: $<>$

36) Für größer und kleiner $>$, so daß $a > b$ heißt: die Größe a ist größer, als die Größe b, oder die Größe b ist kleiner, als die Größe a.

37) Für die Addition das Zeichen $+$, so daß also $a + b$ heißt: a addirt zu b, oder die Summe irgend zweier Größen.

38) Für die Subtraction: $-$; so bezeichnet $a - b$ den Unterschied zwischen a und b oder das, was herauskommt, wenn man die Größe a um die Größe b vermindert.

39) Hiernach lassen sich die Sätze des vorigen §. so andeuten:

17) Ist $a = b$
und $c = b$
so ist $a = c$

18) Ist $a < b$
und $c = b$
so ist $a > c$

19) Ist $a > b$
und $b > c$
so ist $a > c$

20) Ist $a > b$
und $a > c$
so ist $b <> c$

21) $a + b = c$

22) $a + b = b + a$

Die Sätze 27, 28, 29, kann man, je nachdem man sie auffaßt, durch zwei oder auch durch eine Gleichung bezeichnen. Erwägt man nämlich die Bedeutung der Worte im Satz 27, so erhält er eigentlich folgende zwei Sätze:

Eine Größe sey der Unterschied zweier andern.

Diese Größe, vermehrt um den Subtrahenden, gibt den Minuenden des Unterschieds.

In Zeichen: Ist $a = b - c$

so ist $a + c = b$

Diese zwei Sätze in Einen zusammengezogen, lauten so:

Wenn ein Unterschied zweier Größen um seinen Subtrahenden vermehrt wird, so erhält man den Minuenden.

Wie nun in diesem Satze statt „diese Größe" die Beschaffenheit dieser Größe aus dem ersten Satze gesetzt ist, so läßt sich auch das, was in $a = b - c$ von der Größe a gesagt ist, nämlich daß sie $b - c$ sey, in die zweite Gleichung $a + c = b$ für a setzen, und dann hat man $(b - c) + c = b$.

Auf gleiche Weise ist es bei 28, denkt man sich diesen Satz zerlegt, so hat man

in Worten:	in Zeichen:
Eine Größe sey der Unterschied zweier anderer Größen.	$a = b - c$
Diese Größe vom Minuend weggenommen, gibt den Subtrahenden;	$b - a = c$
oder:	
Wenn vom Minuenden eines Unterschieds der Unterschied abgezogen wird, kommt der Subtrahend.	$b - (b - c) = c$

Der Satz (29) würde so bezeichnet werden:

Zwei Größen summirt, geben eine dritte.	$a + b = c$
Die eine derselben von der dritten weggenommen, gibt die andere oder	$c - a = b$
	$c - b = a$
oder:	
Von einer Summe der eine Summand abgezogen, läßt den andern.	$(a + b) - b = a$

In beiden Fällen nimmt man aus der ersten Gleichung das, was sie über die Erzeugung der einen Größe in der zweiten in Zeichen aussagt, und setzt dieß in die zweite, wie es bei der Zusammenziehung der wörtlichen Sätze geschieht.

§. 8.

Unmittelbar aus den Definitionen und Sätzen des §. 6. ergeben sich noch folgende:

In Worten:	In Zeichen:
30) Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert, gibt Gleiches	Ist $a = b$ und $c = d$ so ist $a \pm c = b \pm d$
31) Gleiches um Größeres und Kleineres vermehrt, gibt Größeres und Kleineres	Ist $a = b$ $c > d$ so ist $a + c > b + d$
32) Größeres und Kleineres um Gleiches vermindert, gibt Größeres und Kleineres	Ist $a > b$ und $c = d$ so ist $a - c > b - d$
33) Gleiches um Größeres und Kleineres vermindert, gibt Kleineres und Größeres	Ist $a = b$ $c > d$ so ist $a - c < b - d$
34) Größeres und Kleineres um Größeres und Kleineres vermehrt, gibt Größeres und Kleineres.	Ist $a > b$ $c > d$ so ist $a + c > b + d$
35) Größeres und Kleineres um Kleineres und Größeres vermehrt, gibt Unbestimmtes (d. h. Gleiches, Größeres oder Kleineres)	Ist $a > b$ $c < d$ so ist $a + c \lessgtr b + d$
36) Größeres und Kleineres um Größeres und Kleineres vermindert, gibt Unbestimmtes	Ist $a > b$ $c > d$ so ist $a - c \lessgtr b - d$
37) Größeres und Kleineres um Kleineres und Größeres vermindert, gibt Größeres und Kleineres.	Ist $a > b$ $c < d$ so ist $a - c > b - d$

Anmerkung 1. Man sieht, daß hier in Zeichen jeder wörtliche Satz in seine drei Theile zerlegt betrachtet wird.

Anmerkung 2. Die übrigen Lehrsätze der Addition und Subtraction habe ich erst nach der Addition und Subtraction der Zahlen beigebracht, um bei den daselbst angeführten Beispielen dem Anfänger nicht unverständlich zu werden.

§. 9.

Die bisherige Betrachtung der Größe setzt voraus, daß man wenigstens Raum und Menge unmittelbar, Kraft und Zeit durch Raum- und Mengengrößen auffassen könne. Aber man findet bald, daß es nur gewisse mittle Raum- Zeit, Kraftgrößen, nur wenige Zahlen (oder bestimmte Mengen) sind, die man unmittelbar sich vorzustellen vermag. Welche Hilfsmittel man nun anwende, um auch die Größen genau zu bestimmen, welche das sinnliche Auffassungsvermögen übersteigen oder sich ihm entziehen, wird unten in den Kapiteln von der Multiplication und Division gelehrt werden, aus welchen all das, was unter der Aufschrift „allgemeine Betrachtung" vorkommt, hierhergezogen, die allgemeine Größenlehre ergänzt.

Zweites Kapitel.

Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Von der Bestimmung der Mengengröße oder vom Numeriren.

38) Jedes Ding für sich allein genommen, kann man ein Einzelnes oder Eins nennen.

Das Einzelne wiederholt genommen, gibt zwei; zwei mit demselben Einzelnen zusammen genommen, gibt drei; drei mit demselben Einzelnen vier; vier mit demselben Einzelnen fünf, und so läßt sich ohne Ende fortschreiten.

39) Man sieht, daß hierdurch eine Reihe von Mengen desselben Einzelnen aufgestellt wird, in welcher jede von der vorhergehenden um Eins verschieden ist, und daß man bei jeder Menge, von welcher man weiß, in welcher Stelle dieser Reihe sie steht, den Inhalt an Einzelnen genau kennt.

40) Dieses allmählige Hinzufügen von Einzelnen heißt man Zählen, und eine Menge, deren Inhalt durch Zählen bekannt ist, eine Zahl. Eine Zahl ist also eine bestimmte Menge von einzelnen, unter sich gleichen Dingen. Z. B. Eine Menge von Aepfeln lerne ich kennen, wenn ich sie einzeln zu einander hinzulege und mir dabei bemerke, bis zu welcher Stelle in der Reihe der bestimmten Mengen oder Zahlen ich komme.

41) Ist das Einzelne in der Zahl irgend ein wirklicher Gegenstand oder eine andere Größe, so heißt die Zahl benannt, z. B. fünf Gulden; drei Pferde, vier Menschen; eine Länge von zwei Fuß, u. s. w.

42) Sieht man ab von der Beschaffenheit des Einzelnen und nimmt man bloß an, daß dasselbe Ding in der Menge wiederholt verbunden sei, so heißt die Zahl reine Zahl.

43) Die Zahl ist eine Größe und man kann Zahlen mit einander vergleichen, wenn sie dieselben Einzelnen haben.

Eine Zahl ist gleich einer andern, wenn sie in der Zahlreihe an derselben Stelle steht; größer, wenn sie auf die andere folgt; kleiner, wenn sie ihr vorhergeht. Kommt man z. B. beim Zählen einer Menge von Guldenstücken bis zu füuf, bei einer andern zu vier, so ist erstere größer als letztere; diese kleiner als jene.

So weit man die Zahlreihe im Gedächtniß behält, so weit kann man Mengen zählen, d. h. vergleichen mit einer von den bereits bestimmten Zahlen in der Zahlreihe. Da man aber ohne Ende fortzählen kann, so müßte man die Ordnung von unendlich vielen Zahlnamen mit dem Inhalt der Zahlen an Einzelnen behalten, was unmöglich ist. Man erleichtert sich also dieses Geschäft auf folgende Weise.

1	nennt man	Eins	und	bezeichnet	es	durch	1
11	—	zwei	—	—	—	—	2
111	—	drei	—	—	—	—	3
1111	—	vier	—	—	—	—	4
11111	—	fünf	—	—	—	—	5
111111	—	sechs	—	—	—	—	6
1111111	—	sieben	—	—	—	—	7
11111111	—	acht	—	—	—	—	8
111111111	—	neun	—	—	—	—	9
1111111111	—	zehn.					

Man verlangt von Jedem, daß er sich den Inhalt dieser ersten zehn Zahlen mit ihren Namen merke; dann kann er alle Mengen, die zehn nicht übersteigen, zählen, d. h. genau bestimmen.

Da man aber jede Größe als Einzelnes betrachten kann, so denke man sich zehn als ein Einfaches, das man nicht weiter zergliedert, als eine Einheit; so lassen sich die Zehende zählen, wie zuerst die Einer, und man kann zwei Zehend oder zwanzig, drei Zehend oder dreißig, vier Zehend oder

vierzig u. s. w. bis zehn Zehend verbinden: man erhält hierdurch nur wieder die ersten zehn Zahlen, aber statt in Einern nun in Zehenden ausgedrückt oder benannt.

Den Abstand von einem Zehend zum andern füllt man durch Einer aus, und hierdurch läßt sich also die Reihe der Zahlen von Eins bis Hundert behalten, ohne im Grunde mehr als zehn Zahlen sich vorstellen zu müssen. Freilich ist aber auch der Inhalt der Zahlen über zehn nicht unmittelbar zu erkennen, sondern bedarf einer Zergliederung. Denn wenn ich zwanzig mir zu denken habe, so muß ich mir zwei Einheiten vorstellen, deren jede zehn Einer ist; in vier und dreißig habe ich zunächst zwei verschieden benannte Zahlen neben einander gestellt: vier in Einern, drei in Zehenden. Zergliedere ich dann den Inhalt jedes Zehendes, so überschaue ich nach und nach den ganzen Inhalt von vier und dreißig in Einern. Die Namen der höhern Zahlen sind also so beschaffen, daß man aus ihnen ersieht, wie die Zahlen zusammengesetzt sind, und nur die ersten zehn Zahlnamen erinnern an die Einer selbst, die man sich zu denken hat.

Zehn Zehend nennt man hundert. Die Hunderte zählt man wieder bis zu zehn hundert und füllt den Abstand von einem Hundert zum andern mit Zehenden und Einern aus; so daß also jetzt die Zahlen durch eine Zusammenstellung dreifach benannter Zahlen behalten werden. Z. B. Dreihundert vier und fünfzig ist die Zahl drei in Hunderten, fünf in Zehenden, vier in Einern ausgedrückt. Die Zergliederung des Inhalts all' dieser einzelnen Einheiten läßt dann wieder den Inhalt der ganzen Zahl allmählig überschauen.

Zehn hundert nennt man tausend, zählt auch die Tausende bis zehntausend, und füllt den Abstand von einem Tausend zum andern durch Hunderte, Zehende und Einer aus, so daß man also jetzt vier verschiedene Zahlbenennungen oder Einheiten zusammenstellt, deren Zerlegung den Inhalt der Zahl genau kennen lehrt. Z. B. Vier tausend fünf hundert drei und siebenzig.

So fährt man fort mit den Zehntausenden u. s. w.

45) Obgleich hierdurch das Behalten der Zahlen ungemein erleichtert ist, und weder die Zusammenstellung der verschie-

den benannten Zahlen zu einer, noch die Zergliederung ihres Inhaltes in Gedanken Schwierigkeit hat, so wachsen doch die Namen nach und nach zu solcher Länge an, daß man wünschen muß, ein Mittel zu haben, sie eben so verständlich, als mit Worten und doch kürzer zu bezeichnen, als es hier möglich ist.

Man ist zu dem Ende übereingekommen, sich folgender Tabelle zur kürzern und bequemeren Bezeichnung der Zahlen zu bedienen, die man links beliebig fortsetzen kann.

Billionen			Millionen			Einer		
Tausend			Einer			Tausend		
Hundert	Zehner	Einer	Hundert	Zehner	Einer	Hundert	Zehner	Einer
	5	1		6	7		7	3
			4		3	7		1
						5		4
						2		3
								1

Da nämlich keine Einheit zu einer größern Zahl zusammengesetzt wird, als zehn, so bedarf man nur die oben aufgestellten 9 Zeichen, um in dieser Tafel jede beliebige Zahl zu bezeichnen. Für zehn ist kein Zeichen nöthig, da zehn Einheiten jeder Art in der nächstfolgenden Stelle links eine Einheit der höhern Ordnung sind.

So lassen sich also die in der Tafel stehenden Zahlen so aussprechen:

Fünfzig tausend und sieben Billionen, drei tausend und zehn Millionen vierzig tausend und ein und dreißig.

Sechzig Billionen und sieben hundert Millionen. Ein hundert tausend Billionen vierzig tausend Millionen fünf hundert tausend und zwei hundert.

Es erhellet, daß man alle Namen, welche die Ueberschrift der Tafel enthält, ausspricht, nur mit Hinweglassung des Wortes Einer und Eins, wenn es als Benennung vorkommt, und umgekehrt hat das Eintragen von Zahlen in diese Tafel keine Schwierigkeit.

46) Gleichwohl wäre das wiederholte Anschreiben der Tabelle selbst zeitraubend. Da sich nun in ihr die richtige Benennung der Einheit einer Zahl leicht finden läßt, wenn man nur die Stelle richtig angibt; so bezeichnet man die leeren Stellen der Tabelle mit 0 (sprich: Null, welches so viel bedeutet, als keine Zahl von der Einheit, welche die Stelle enthalten würde), die Abschnitte der Einer und Tausende mit (,), die Hauptabschnitte der Einer, Millionen, Billionen durch I, II ... von der Million anfangend. Darnach werden also die in der Tafel stehenden Zahlen kurz so bezeichnet:

$$50{,}007{,}^{II}003{,}010{,}^{I}040{,}031$$

$$60{,}^{II}000{,}700{,}^{I}000{,}000$$

$$100{,}000{,}^{II}040{,}000{,}^{I}500{,}200$$

Nunmehr lassen sich Zahlen nach folgender Regel leicht anschreiben:

Schreibe den Betrag des letzten Abschnittes links an, mache an seine letzte Stelle rechts (,); endigt er seinen Hauptabschnitt, so füge oben (I, II ...) bei, um die Einheit zu bezeichnen, die er enthält; enthielt er Tausende, so schreibe den Betrag des Einerabschnittes eben so hinzu, oder fülle seine Stellen mit Nullen aus, wenn in ihm keine Zahl vorkommt, und füge dann das Zeichen der Einheit (I, II ...) bei. So fahre fort in allen rechts folgenden Abschnitten.

Durch diese Regel ist man selbst des Bedenkens überhoben, in welcher Stelle eine gewisse Zahl zu stehen komme und braucht überhaupt immer blos drei Stellen auf einmal zu behalten und anzuschreiben. Z. B. Sieben hundert und fünf Bill. vier hundert neun und dreißig tausend und achtzig Millionen drei hundert tausend und vier hundert schreibe:

$$705{,}^{II}439{,}080{,}^{I}300{,}400.$$

Umgekehrt läßt sich jede angeschriebene Zahl leicht aussprechen, wenn man sie von rechts nach links in Abschnitte von drei Stellen zerlegt und die Hauptabschnitte bezeichnet.
Z. B. aus: 456738927 wird: 456,I 738,927.
Aus 10586700 wird: 10,I 586,700.

Anmerkung 1. Es ist keineswegs nothwendig, gerade zehn Zahlen als einfache anzunehmen und dem Zählen zum Grunde zu legen, obgleich die zehn Finger der Hände den meisten Völkern eine natürliche Veranlassung gegeben haben, in den einfachen Zahlen bis zu zehn fortzugehen. Man könnte eben sowohl weniger oder mehr als zehn Zahlen zu Grundzahlen machen, und man hat auch bei einigen roheren Völkern drei und vier Zahlen als Grundzahlen gefunden. Will man mehr als zehn Zahlen als einfache Zahlen aufstellen, so muß man ihnen neue einfache Namen geben, die sich nicht auf die Zusammensetzung aus Zehn beziehen.

In der teutschen Sprache zeigen die Wörter elf und zwölf an, daß man es bequem gefunden, in manchen Fällen zwölf einfache Zahlen anzunehmen, wie man denn auch nach Duzenden, wie nach Zehenden, zählt und die Längenmaße meist in zwölf Theile getheilt sind. Weil aber die Zeichen sich dem Zählen nach Duzenden nicht anschließen, da sie sich blos auf Zehende beziehen, so kommt es immer mehr ab, so wie auch die Maße immer allgemeiner in zehn Theile getheilt werden. Von einer andern, vielleicht noch ältern, Art des Zählens finden sich ebenfalls Spuren im Teutschen. Es scheint nämlich unter dem Volke das Zählen nach Vier ziemlich allgemein gewesen und erst dadurch verdrängt worden zu sein, daß in den Schulen die Zahlen nach zehn bezeichnet wurden. Noch immer hört man aber hier und da folgende Wörter: Ein Wurf oder Erf (vier), Zwerf (zwei vier), Treff (drei vier), ein Secht (vier vier), ein Schock (vier Secht *). Diese Art des Zählens ist leichter, als die nach zehn, weil

*) Bei Schock findet sich indeß häufiger die Bedeutung 60, als 64, die älter zu sein scheint. Eben so ist jetzt auch für Wurf die Bedeutung 5 gebräuchlicher.

man weniger einfache Zahlen zu behalten hat und empfiehlt sich daher hauptsächlich bei kleinern Zahlen, wie sie im gewöhnlichen Verkehr meist vorkommen; daher denn auch die Getraidmaße in vielen Gegenden nach vier getheilt sind und der Gulden nach Batzen, zu vier Kreuzern, gezählt wird. Bei größern Zahlen tritt aber der unbequeme Umstand ein, daß die Zahlnamen zu lang und vieltheilig werden. In der Bezeichnung würde man die vorhandenen Zahlzeichen 1, 2, 3 und eben so 0 in der bisherigen Bedeutung gebrauchen; nur würden die Stellen, statt wie dort Einer, Zehende, Hunderte, Tausende zu bezeichnen, jetzt den in ihnen stehenden Ziffern die Werthe Eins, Wurf oder Erf, Secht, Schock geben. Zur Erläuterung des Gesagten stehe hier eine Zusammenstellung der Bezeichnung unsrer Zahlen bis 64 nach Paaren, Vieren, Zehenden und Duzenden, worin für zehn und elf zwei einfache Zeichen x und y angenommen werden.

Nach Paaren,	Würfen,	Zehenden,	Duzenden.
1	1	1	1
10	2	2	2
11	3	3	3
100	10	4	4
101	11	5	5
110	12	6	6
111	13	7	7
1000	20	8	8
1001	21	9	9
1010	22	10	x
1011	23	11	y
1100	30	12	10
1101	31	13	11
1110	32	14	12
1111	33	15	13
10000	100	16	14
10100	110	20	18
11000	120	24	20
11110	132	30	26
100000	200	32	28
100110	212	36	30

100100

Nach Paaren,	Würfen,	Zehenden,	Duzenden.
101111	233	47	3y
110000	300	48	40
111000	330	60	50
1000000	1000	64	54

111100

2. Anmerkung. Obgleich die Art, wie wir gegenwärtig die Werthe der Ziffern bezeichnen, nämlich durch die bloße Stellung, die bequemste ist und am wenigsten Verwirrung und Verwechslung zuläßt, so liegt es doch keineswegs im Wesen des Zählens nach zehn, gerade jener Bezeichnung sich zu bedienen. Vielmehr könnte man durch irgend ein Zeichen, den einzelnen Ziffern beigesetzt, die Veränderung der Werthe angeben, oder auch für die neun Zahlen einer andern Einheit ein ganz neues Zeichen setzen. Beides thaten z. B. die Griechen, indem sie für Zehende und Hunderte neue Zeichen, für die Tausende aber die Zeichen der Einer mit untergeschriebenem (ι) setzten. Ihre Zeichen sind also:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
Zehende	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
Hunderte	ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Tausende	α͵	β͵	γ͵	δ͵	ε͵	ς͵	ζ͵	η͵	ϑ͵

Damit konnten sie jede Zahl bezeichnen, welche kleiner ist, als 10000, z. B. 2345 würde durch βτμε, 9200 durch ϑδ͵, 3008 durch γη bezeichnet werden. Für die Bezeichnung der Zehntausende hätten sie blos (ι) den Zehnerzeichen unterschreiben dürfen; eben so würde derselbe Strich unter dem Zeichen der Hunderte Hunderttausende bezeichnet haben. Dafür setzten sie, wo Zehntausende vorkamen, *M* oder *Mυ*, (μυριας) und schrieben die Anzahl der Myriaden oder Zehntausende entweder über oder vor dieses *M*. Z. B. 780000 wird hiernach $\overset{ση}{M}$ oder ση*Mυ*; rechts an dieses Zeichen wurden dann die übrigen Zahl-

zeichen gesetzt. Z. B. Für 40056789 schreibt man δεMςψπϑ. Man findet auch *M* ganz ausgelassen und blos (.)' dafür gesetzt. Z. B. 92710500 = ϑδοα.φ.

In der ältern Zeit, so lange die Rechnung minder ausgebildet war, hatte man wohl nur selten über 10000000 zu zählen. Kam es aber auch einmal vor, so bediente man sich größerer Einheiten. Später findet man eine Bezeichnung, die unserem System nahe kommt. Man behielt nämlich die Abschnitte nach Myriaden bei und zählte nach ihnen weiter, wie wir nach Tausenden. So bezeichnete man also:

$$2{,}643{,}^{\mathrm{II}}383{,}278{,}^{\mathrm{I}}502{,}824$$

durch $\beta\chi\mu\gamma . \gamma\omega\lambda\beta . \zeta\omega\nu . \beta\omega\varkappa\delta$

Die römische Zahlbezeichnung hat für zusammengesetzte Rechnungen noch weniger Werth als die griechische, denn die Zeichen schließen sich nicht völlig an die, dem Zählen zum Grunde liegende, Einheit Zehen an. Sie setzen nämlich für

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
20	30	40	50	60	70	80	90	100	
XX	XXX	XXXX	L	LX	LXX	LXXX	LXXXX	C	
200	300	400	500	600	700	800	900	1000	
CC	CCC	CCCC	D	DC	DCC	DCCC	DCCCC	M,	

wobei noch zu merken ist, daß für

4	9	40	90	auch gesetzt wird
IV	IX	XL	XC	

Man sieht hieraus, daß die Römer sich eigentlich nur fünf einfache Zahlen dachten und daß ihre Zehen selbst aus zwei Fünfen zusammengesetzt wird. Zwar wird dann die Zehen Einheit, aber es werden schon fünf Zehende als neue Einheit bezeichnet, durch deren Zusammensetzung mit zehen bis zu hundert gezählt wird. Eben so hebt die Bezeichnung 500 hervor. Bei der wörtlichen Benennung der Zahlen findet sich indeß dieses Schwanken zwischen fünf und zehen nicht, sondern die zehn einfachen Zahlen haben einzelne Namen und die Zehende bezeichnet man, wie im Teutschen, durch dieselbe Endung.

Wie unbrauchbar aber auch die römischen Ziffern für die Bezeichnung großer Zahlen sein mögen, so läßt sich doch nicht läugnen, daß sie weit anschaulicher sind, als die gegenwärtige Art, Zahlen zu bezeichnen durch neun Zeichen und deren Stellung, die griechische nicht zu erwähnen. Genau genommen, braucht man hier nur sechs Zeichen zu behalten, I, M, V, X, C, D, übrigens gibt die Verbindung dieser Zeichen selbst den Inhalt der Zahl so vereinzelt an, daß man ihn nachzählen kann. Sie empfiehlt sich also bei kleinen Zahlen und einfachen Rechnungen, wo das Gedächtniß nur wenig Unterstützung durch das Zeichen bedarf. Daher findet man sie immer noch häufig unter dem Landvolke, obgleich seit 1 Jahrhundert und länger auch in den meisten Dorfschulen der Gebrauch der neuern Ziffern gelehrt wird.

Die römischen Zahlzeichen deuten auf die, bei den Römern gebräuchliche Art des Rechnens mittels sinnlicher Hilfe hin, woher auch die Wörter abacus, calculus, calculos ponere, subducere, kommen. Auch in Teutschland war das Rechenbrett früher gebräuchlich und die Rechenpfennige sind vielleicht noch nicht völlig außer Gebrauch. Der gemeine Russe führt sein Rechenbrett noch jetzt meist bei sich.

3. Anmerkung. Die Ziffern, mit denen wir gegenwärtig rechnen, heißen die arabischen, weil sie um das Jahr 1000 von Spanien aus in Europa sich verbreitet haben. Doch werden die Araber nicht für Erfinder derselben gehalten, sondern Indien scheint das Land zu sein, wo man sich derselben zuerst bediente.

Zweiter Abschnitt.

Vom Addiren und Subtrahiren der Zahlen.

§. 1. Addition.

47) Das Addiren einer Zahl zu einer andern geschieht durch Hinzuzählen ihrer Einer zu den Einern der ersten. 5+3=5+1+1+1.

48) Man kürzt dieses Hinzuzählen ab, indem man das Ergebniß der Summirung jeder einfachen Zahl mit jeder andern im Gedächtniß behält, nach folgender Tafel, die man das Eins und Eins nennt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Demnach hat man also $8+8=17$, $5+8=13$ u. s. w. ohne weiteres Zählen.

Da nun jede Zahl nur aus Zahlen zusammengesetzt ist, deren keine mehr als 10 Einheiten hat, so lassen sich mit Hilfe dieser Tafel alle Zahlen addiren.

49) Für mehrzifferige Zahlen verfährt man nach folgender Regel:

Man setze zur Erleichterung die Zahlen mit den gleichbenannten Stellen untereinander;

addire die Reihe der Einer; kommen weniger als zehn Einer in die Summe, so schreibe man diese in derselben Stelle der Summe an; kommt eine Zahl, die aus

Zehnern und Einern besteht, so schreibe man blos die Einer an und nehme die Zehner als Summanden zur Zehnerreihe.

Die Zehner addirt man eben so und nimmt die Hunderte, die man etwa erhält, zu den Hunderten u. s. f.

Was in der letzten Stelle links herauskommt, wird ganz angeschrieben.

Beispiele:

17	136	309	1456	109380
8	25	97	7893	14007
25	161	406	4567	5070
			893	20034
			14809	148491

Zusatz 1. Da man sich leicht überzeugt, daß dasselbe herauskommt, in welcher Ordnung man auch die Zahlen summirt, so kann man zur Probe der richtigen Addition jede Zahlreihe einmal von oben herab und dann von unten herauf addiren (23.).

Zusatz 2. Bei sehr langen Zahlreihen könnte man erst einen Theil der Summanden und dann den andern summiren und daraus die Hauptsumme finden. Z. B.

$5+7+9+4+5+7+6+3=46$

$(5+7+9+4)+(5+7+6+3)=25+21=46.$

§. 2. Subtraction.

50) Um zu wissen, welche Zahl übrig bleibt, wenn man 7 von 12 wegnimmt, muß man wissen, welche Zahl mit 7 zusammengezählt 12 gibt. Das Subtrahiren setzt also die Addition voraus und man bedient sich der Tafel der Summen aller Grundzahlen auch zur Subtraction.

Z. B. daß 15 vermindert um 9 die Zahl 6 gibt, kann man nur dadurch sogleich angeben, daß man schon früher gefunden hat, 9 und 6 ist 15.

Eben so findet man $17-8=9$, $13-7=6$.

Als besondere Fälle erhält man: 6—6=0, d. h. eine Zahl von sich selbst weggenommen, läßt nichts zum Rest.

6—0=6

Eine Zahl um Nichts vermindert, bleibt sie selbst.

51) Bei mehrzifferigen Zahlen zieht man die Zahlen von gleicher Einheit von einander ab und stellt dann die Reste zusammen. Man erleichtert sich das Verfahren, wenn man die gleichbenannten Stellen untereinander setzt. Z. B.

456738	5673012
210413	13011
246325	5660001

52) Ist die gleichbenannte Zahl im Minuend kleiner, als im Subtrahenden, so kann man nicht abziehen. Man nimmt alsdann von der nächsten Stelle links im Minuenden eine Einheit zu der Zahl rechts, wodurch diese um zehn Einheiten ihrer Art vermehrt wird. Dann läßt sich allemal abziehen, da im Subtrahenden höchstens 9 stehen kann. In der Stelle links kann man sich Anfangs durch (.) anmerken, daß 1 weggenommen worden. Bei größerer Uebung unterläßt man es. Z. B.

14.563.1	34567	14569
56323	15638	38
89308	18929	14531

Steht in einer Stelle 0, d. h., enthält sie gar keine Zahl, so muß man zur nächsthöhern links und so weiter fortgehen, bis man an eine Stelle kommt, in welcher eine Zahl steht. Von dieser nimmt man 1, so ist diese in der nächsten Stelle rechts 10; von diesen zehn nimmt man 1 zur nächsten Stelle rechts, läßt also 9 zurück; diese 1 ist abermals 10 in der Stelle rechts und auch hier, wenn es erforderlich, um 1 vermindert, läßt sie 9 als Rest zurück und man erhält 10 in der darauffolgenden Stelle, wo die Subtraction geschehen sollte.

Z. B.	1.4.5.6.0.3	57.0.0.3	120000
	58974	12987	87001
	86629	44016	32999

53) Da der Minuend den Subtrahenden und Rest enthält, so kann man eine Probe der richtigen Subtraction dadurch anstellen, daß man den Rest zum Subtrahenden wieder addirt und sieht, ob der Minuend herauskommt.

§. 3.

Ueber Addition und Subtraction gleichbenannter Zahlen.

54) Zahlen, deren Einheit eine beliebige Größe oder ein beliebiges Einzelnes ist, oder sogenannte gleichbenannte Zahlen, werden wie reine Zahlen ausgesprochen, addirt und subtrahirt, nur wird dem Zahlbetrag der Name der Einheit beigefügt.

Z. B. Großbritanniens Handel setzt jährlich zehn tausend vier hundert und sechs und neunzig Millionen Pfund Sterling um oder hundert fünf und zwanzig tausend vier hundert und zwei und fünfzig Millionen Gulden rhein.

Auf der ganzen Erde leben ohngefähr 2 Mill. und 500000 Juden, 200 Mill. Christen, 140 Mill. Muhammedaner, 657 Mill. Heiden: wie viele Menschen im Ganzen?

Unter den 200 Mill. Christen sind 90 Mill. Katholiken, 35 Mill. der griech. Kirche zugethan: wie viele sind für die verschiedenen übrigen Confessionen anzusetzen?

55) So lange nur wirklich angegeben ist, ob summirt oder abgezogen werden soll, macht die Benennung keine Schwierigkeit. Oft findet man aber Worte in der Aufgabe, die doch nichts anderes als addiren und subtrahiren bezeichnen. Hier muß man jedes Mal genau beobachten, was verlangt wird. Z. B.

1) Wenn man in ein Faß, das schon 271 Maß enthält, noch 83 Maß zuschüttet, später aber 212 Maß abzapft, wie viel enthält es noch?

2) Wer 378 Meilen weit von Nürnberg aus gerade vorwärts gereist ist und darauf 131 M. zurückgeht, wie weit ist der von Nürnberg entfernt?

3) Ein Luftball erhob sich 6500 Fuß über die Erde, fiel darauf 4700 Fuß, stieg wieder 3760 Fuß und fiel abermal 2500 Fuß, wie hoch stand er zuletzt über der Erde?

4) Bei 6500 fl. Vermögen, machte Einer 4200 fl. Schulden, zahlte von diesen ab 2100 fl., und borgte wieder 1200 fl., wie viel hatte er nun Vermögen?

5) Ein Spieler gewann 73 fl., verlor darauf 17 fl., 18 fl. und 12 fl., gewann wieder 68 fl., und verlor endlich 81 fl., wie viel hat er gewonnen?

6) Nürnberg liegt ohngefähr 49 Grad nördlich vom Aequator oder nördlicher Breite, Christiania in Norwegen 11 Grad nördlich von Nürnberg; wie weit liegt diese Stadt nördlich vom Aequator?

7) Nürnberg liegt ohngefähr 28 Grad östlich vom ersten Meridian, Paris etwa 8 Grad westlich von Nürnberg, wie viel Grade liegt Paris vom ersten Meridian gegen Osten?

§. 4.

Allgemeine Lehrsätze der Addition und Subtraction

56) Satz 27 und 29 kann man auch so ausdrücken:

Eine Größe bleibt ungeändert, wenn man eine gleichartige zu ihr addirt und darauf dieselbe wieder abzieht, oder umgekehrt, wenn man eine andere von ihr abzieht und darauf dieselbe wieder hinzufügt. Z. B.

$$(12+7)-7=12,\ (12-5)+5=12$$

oder so bezeichnet, daß es auf alle Fälle paßt:

$$(a+b)-b=a,\ (a-b)+b=a.$$

Daher sagt man Addition und Subtraction stehen einander entgegen und heben sich gegenseitig auf. Daher werden wir in der Folge das Zeichen der Subtraction (−) das entgegengesetzte von dem der Addition (+) nennen und umgekehrt.

57) Statt mehrer einzelner Größen kann man ihre Summe oder statt einer Summe einzelner Größen die einzelnen Größen selbst nach einander zu einer gleichartigen Größe hinzufügen. Z. B.

$$5+7+11=5+(7+11)=5+18=23.$$

oder $12+28=12+20+8=32+8=40.$

Allgemein: $a+b+c=a+(b+c)$

$$a+(c+d)=(a+c)+d=a+c+d.$$

Anmerkung 1. Bei den allgemeinen Zeichen kann von einer Ausrechnung nicht die Rede sein, sondern in ihnen läßt sich nur anzeigen, wie man rechnen soll, wenn man Zahlen hat, da sie blos statt der weitläufigern wörtlichen Sätze stehen.

Anmerkung 2. Durch die Klammern werden Größen oder bloße Zahlen zu einem Ganzen verbunden, dessen Inhalt, er mag schon berechnet sein oder nicht, für sich allein besteht. Sie geben also an, daß die Größen, deren Zeichen von ihnen umschlossen sind, zunächst verbunden werden sollen und erst das, was hier herauskommt, mit den übrigen Größen zusammenhängt. Läßt man sie also weg, so ist die Ordnung der Verbindung willkührlich.

58) Eine Summe wird abgezogen von einer Größe, wenn man ihre Summanden nach einander abzieht. Z. B.

$$12-(7+3)=(12-7)-3=(12-3)-7=2$$
$$48-(27+11)=(48-27)-11=(48-11)-27$$

oder berechnet $48-38=21-11=37-27=10$

$$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b.$$

Da die Ordnung, in welcher man die Summanden abziehen will, willkührlich ist, so kann man auch die Klammer weglassen und die Summanden mit dem Zeichen der Subtraction hinzuschreiben (57 A. 2.) Z. B.

$$12-(7+2)=12-7-3$$

oder $12-10=5-3=2$

$$a-(b+c)=a-b-c$$

59) Ein Unterschied zweier Größen wird um eine Größe vermehrt, entweder indem man sie zum Minuenden addirt oder vom Subtrahenden subtrahirt. Z. B.

$$(12-7)+3=(12+3)-7=12-(7-3)$$

oder $5+3=15-7=12-4=8$

$$(18-15)+11=(18+11)-15=18-(15-11)$$

oder $3+11=29-15=19-4=14$

$$(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c).$$

60) Ein Unterschied wird um eine Größe vermindert, wenn man diese entweder vom Minuenden abzieht, oder zum Subtrahenden addirt. Z. B.

$$(12-7)-3=(12-3)-7=12-(3+7)$$

oder $5-3=9-7=12-10=2.$

$$(18-15)-1=(18-1)-15=18-(15+1)$$

oder $3-1=17-15=18-16=2$

$$(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c).$$

Anmerkung. Man sieht, daß dieß dieselben Verbindungen sind, wie in Satz 58, nur anders aufgefaßt. Während man nämlich in (S. 58) annimmt, die Verbindung

$$a-(b+c)$$

sey zuerst vorhanden, oder man habe von einer Zahl eine Summe abzuziehen und frage nun, welche andere Verbindung der Größen dasselbe Ergebniß liefere, geht man hier von der Verbindung $(a-b)-c$ aus, und findet bei näherer Betrachtung, daß hiefür auch gesetzt werden kann $a-(b+c)$

61) Ein Unterschied bleibt ungeändert, wenn man Minuend und Subtrahend um eine gleiche Größe vermehrt oder vermindert. Z. B.

$$29-23=(29+11)-(23+11)$$

oder $6 = 40 - 34$

$$38-12=(38-7)-(12-7)$$

oder $26 = 31 - 5$

$$a-b=(a+c)-(b+c)$$

$$a-b=(a-c)-(b-c)$$

62) Ein Unterschied wird zu einer Größe addirt, wenn man zuerst den Minuenden addirt und darauf den Subtrahenden abzieht, oder wenn man zuerst den Subtrahenden abzieht und dann den Minuenden addirt.

$$56+(12-7)=(56+12)-7$$

oder $56+5=68-7=61$

$$17+(19-10)=(17+19)-10$$

oder $17+9=36-10=26$

Aber auch $56+(12-7)=(56-7)+12$

oder $56+5=49+12=61$

$$17+(19-10)=(17-10)+19$$

oder $17+9=7+19=26$

daher:

$$a+(b-c)=(a+b)-c$$

und $a+(b-c)=(a-c)+b$

Zusatz. Da die Ordnung, in welcher hier abgezogen und addirt wird, gleichgültig ist, so kann man auch die Klammern weglassen und schreiben:

$$56+(12-7)=56+12-7$$
$$a+(b-c)=a+b-c$$

63) Ein Unterschied wird von einer Größe abgezogen, wenn man den Minuenden abzieht, aber dann den Subtrahenden hinzufügt, oder umgekehrt, wenn man den Subtrahenden zuerst addirt und dann den Minuenden abzieht.

$$12-(10-7)=(12-10)+7$$
oder $12-3=2+7=9$
$$12-(10-7)=(12+7)-10$$
oder $12-3=19-10=9.$

Daher auch

$$a-(b-c)=(a-b)+c$$
und $$a-(b-c)=(a+c)-b$$

Zusatz. Auch hier kann man, da die Ordnung, in welcher addirt und subtrahirt wird, nichts ändert, die Klammern des Unterschieds weglassen und seine Glieder mit entgegengesetzten Zeichen zur ersten Größe hinzuschreiben. Z. B.

$$12-(10-7)=(12-10)+7=(12+7)-10=12-10+7$$
$$a-(b-c)=a-b+c$$

Anmerkung. Es ist hier und für die Folge zu merken, daß, wenn das erste Glied eines Ausdrucks kein Zeichen hat, immer das Additionszeichen (+) vor demselben anzunehmen ist.

64) Wenn man also eine Summe (57) oder einen Unterschied (62) zu einer Größe hinzufügen soll, so kann man dieß dadurch anzeigen, daß man ihre Klammer wegläßt und die Glieder mit denselben Zeichen hinzuschreibt, die sie in der Klammer haben. Z. B.

$$a+(b+c)=a+b+c$$
$$a+(b-c)=a+b-c$$

Soll man sie abziehen (58 und 63), so kann zwar auch die Klammer wegbleiben, man muß aber den Gliedern die entgegengesetzten Zeichen geben, Z. B.

$$a-(b+c)=a-b-c$$
$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Zusatz. Da also der Ausdruck $a-b-c$ dasselbe sagt, wie $(a-b)-c$ oder $(a-c)-b$, und eben so $a-b+c$ so viel bedeutet, als $(a-b)+c$, so sieht man, daß ein Ausdruck, der gar keine Klammer enthält, so zu verstehen ist, daß jedes folgende Glied mit dem Betrag aller vorhergehenden so zu verbinden ist, wie es sein Zeichen verlangt. Z. B.

1) $12-5-4=(12-5)-4=7-4=3$
2) $12-5+2=(12-5)+2=7+2=9$
3) $12+3-7=(12+3)-7=15-7=8.$

65) Hieraus sieht man zugleich, daß, wenn man eine Reihe von additiven und subtractiven Größen hat, diese so zu berechnen ist, daß man alle additiven Glieder addirt und alle subtractiven und letztere Summe von ersterer abzieht, oder daß sich alle subtractiven Glieder auf die Summe aller additiven beziehen.

denn $a-b+c-d+e=$
$(a-b)+c-d+e=$ nach (59)
$([a+c]-b)-d+e=$ nach (60)
$([a+c]-[b+d])+e=$ nach (59)
$(a+c+e)-(b+d)$

oder $12-7-9+100-6=$
$(12-7)-9+100-6=$ nach (60)
$(12-[7+9])+100-6=$ nach (59)
$([12+100]-[7+9])-6=$ nach (60)
$(12+100)-(7+9+6)=$
$112-22=90$

daher kürzer:
$a+b-c-d+e-f=$
$(a+b+e)-(c+d+f)$
$12-6+9-10+15=$
$(12+9+15)-(6+10)=36-16=20.$

Ohne diese Zusammenfassung der additiven und subtractiven Glieder ließe sich ein solcher Ausdruck oft gar nicht berechnen. Wenn nämlich die Glieder so gestellt sind, daß die subtractiven vor allen, oder doch vor den größern additiven ständen, Z. B. $7-3-12+4-27+100$

so könnte man in der angegebenen Ordnung die Rechnung nicht vornehmen; wohl aber, wenn seine Glieder in einen Unterschied zweier Summen zusammengefaßt sind:

$$(7 + 4 + 100) - (3 + 12 + 27) = 69.$$

66) Da man hiernach jeden zusammengesetzten Ausdruck als Summe (wenn er lauter additive Glieder hat) oder Unterschied (wenn er additive und subtractive Glieder hat) betrachten kann, so kann man seine Addition und Subtraction zu einer andern Größe eben so anzeigen, als oben (64) bei Summen und Unterschieden geschehen ist.

Z. B. Soll das, was herauskommt, wenn man

$$7 + 9 - 17 - 11 + 25$$

verbindet, oder $41 - 28$ oder 13 zu 19 addirt werden, so erhielte man 32 oder: $19 + (7 + 9 - 17 - 11 + 25) =$

$$19 + (41 - 28) = (19 + 41) - 28 = 32$$

dafür kann man schreiben:

$$19 + (7 + 9 - 17 - 11 + 25) = 19 + 7 + 9 - 17 - 11 + 25$$
$$= (19 + 7 + 9 + 25) - (17 + 11) = 60 - 28 = 32$$

Soll man den Betrag von $27 - 11 + 13 - 19$ oder 10 abziehen von 60, so hat man 50, was man so bezeichnet:

$$60 - (27 - 11 + 13 - 19) = 60 - (40 - 30) = 60 - 10 = 50$$

so kann man dieß auch so anzeigen:

$$60 - (27 - 11 + 13 - 19) = 60 - 27 + 11 - 13 + 19 =$$
$$(60 + 11 + 19) - (27 + 13) = 99 - 40 = 50.$$

Weitere Beispiele:

1) $40 - (27 - 13 - 11 + 12 + 17 - 28) =$
$40 - ([27 + 12 + 17] - [13 + 11 + 28]) =$
$40 - (56 - 52) = 40 - 4 = 36$

oder:

$40 - (27 - 13 - 11 + 12 + 17 - 28) =$
$40 - 27 + 13 + 11 - 12 - 17 + 28 =$
$(40 + 13 + 11 + 28) - (27 + 12 + 17) =$
$92 - 56 = 36$

2) $a - (b - c + d - e + f - g - h) =$
$a - ([b + d + f] - [c + e + g + h]) =$ nach (63)
$(a + c + e + g + h) - (b + d + f)$

oder nach (65):

$= a - b + c - d + e - f + g + h$

$= (a + c + e + g + h) - (b + d + f)$

3) $a + (b - c + d - e + f - g - h) =$

$a + ([b + d + f] - [c + e + g + h]) =$ nach (62)

$(a + b + d + f) - (c + e + g + h)$

oder nach (65):

$= a + b - c + d - e + f - g - h$

$= (a + b + d + f) - (c + e + g + h)$

Zusatz. Hieraus geht zugleich hervor, daß man in jedem Ausdruck, der aus additiven und subtractiven Gliedern besteht, einige dieser Glieder mit ihren Zeichen in eine Klammer fassen darf, wenn man der Klammer + vorsetzt; mit entgegengesetzten Zeichen, wenn man derselben — vorschreibt.

Z. B. $a - b + c - d + e =$

$a + (-b + c - d + e)$, oder

$= a - (b - c + d - e)$

$100 - 5 - 8 + 19 = 119 - 13 = 106$

$100 + (-5 - 8 + 19) = 100 + 6 = 106$

$100 - (5 + 8 - 19) = 100 - 13 + 19 = 106$

67) Nach diesen Regeln lassen sich nun auch Verbindungen gleichartiger Größen, deren Glieder durch Klammern selbst geschieden sind, auf Summen oder Unterschiede zurückführen.

Z. B. $112 + (27 - [10 - [12 - 5]) - [13 - 8])$

Hier soll zu 112 ein Ausdruck addirt werden, der aus drei Gliedern besteht. Das erste Glied ist 27, das zweite $(10 - [12 - 5])$, das dritte $(13 - 8)$. Die äußerste Klammer wird also weggelassen und jedes Glied mit seinem Zeichen hinzugeschrieben (64):

$= 112 + 27 - (10 - [12 - 5]) - (13 - 8)$

Mit den einzelnen, noch zusammengesetzten Gliedern verfährt man eben so. Hier ist $(10 - [12 - 5])$ abzuziehen. Man läßt also die äußere Klammer weg und gibt den Gliedern in der Klammer die entgegengesetzten Zeichen. Also erhält man

$112 + 27 - 10 + (12 - 5) - (13 - 8)$

Nun sind noch die beiden letzten Glieder von der Klammer zu befreien:

$112 + 27 - 10 + 12 - 5 - 13 + 8$

und dieser Ausdruck kann in einen Unterschied zweier Summen verwandelt und als solcher leicht berechnet werden:

$$(112+27+12+8)-(10+5+13)=131.$$

Beispiele:

1) $112-(27-(10-[12-5])-[13-8])$
$= 112-27+(10-[12-5])+(13-8)$
$= 112-27+10-(12-5)+13-8$
$= 112-27+10-12+5+13-8$
$= (112+10+5+13)-(27+12+8)=140-47=93$

2) $58-(36-[35-[34-[27-[26-15]]]])=$
$58-36+(35-[34-[27-[26-15]]])=$
$58-36+35-(34-[27-[26-15]])=$
$58-36+35-34+(27-[26-15])=$
$58-36+35-34+27-(26-15)=$
$58-36+35-34+27-26+15=$
$(58+35+27+15)-(36+34+26)=$
$135-96=39.$

Dieß hätte man hier auch erhalten, wenn man den Ausdruck nach der ersten Zusammenstellung der Größen berechnet hätte. Z. B. $26-15=11$, $27-11=16$, $34-16=18$, $35-18=17$, $36-17=19$, $58-19=39$.

Eben so hätte man im vorigen Beispiel rechnen können: $12-5=7$, $10-7=3$, also ist $(10-[12-5])=3$, $27-3=24$; $13-8=5$, $24-5=19$, $112-19=93$.

Hält man in diesen Beispielen den vorletzten Ausdruck mit dem ersten zusammen; so kann man alle Klammern auf einmal weglassen, wenn man den Gliedern, auf welche eine gerade Anzahl von Subtractionszeichen einwirkt, das Additionszeichen, denen, auf welche eine ungerade Anzahl einwirkt, das Subtractionszeichen vorsetzt. Denn daraus ergibt sich für das zweite Beispiel aus:

$$58-(36-[35-[34-[27-[26-15]]]])$$

sogleich: $58-36+35-34-27--26+15.$

Z. B. $a-[b-(c-d)-(e-[f+g])-(h+k)]$
$= a-b+c-d+e-f-g+h+k$
$= (a+c+e+h+k)-(b+d+f+g)$

Zur Uebung:

1) $a-[b-(c-(d-(e-f)-g)-h)-k] =$
$a-b+c-d+e-f+g-h+k =$
$(a+c+e+g+k)-(b+d+f+h).$

2) $40-[(20-10)-(12-[17-16])+12] = 29$

3) $70-[-10+(11-[12+13]-14)+15] = 93$

4) $80-[50-(40-30)-(20-[10-11])] = 61$

5) $90-[25-(60-[70-12]-15)] = 52$

6) $40+(7-8)-(9+[10-11]+12) = 19.$

68) Bisher wurde immer vorausgesetzt, daß man am Ende der Umwandlung des Ausdrucks entweder auf eine Summe oder auf einen solchen Unterschied komme, dessen Minuend größer sey, als der Subtrahend. So lange der Ausdruck noch nicht für die Rechnung geordnet ist, kann nämlich gar wohl eine subtractive Zahl vor der additiven stehen; bei der Zusammenfassung erhalten die Glieder die Stellung, in welcher sie berechnet werden können. Z. B.

$5-7-9+12-27+100 =$
$(5+12+100)-(7+9+27) = 117-43 = 84.$

Kommt aber für die Berechnung selbst eine Zusammenstellung vor, wie: $5-7$ oder $3-11$ u. dgl., so kann man die Rechnung, welche diese Ausdrücke vorschreiben, nicht ausführen. Doch kann man etwa, weil man Minuend und Subtrahend um Gleiches vermindern darf, und $a-a=o$ ist, setzen:

$5-7=(5-5)-(7-5)=0-2=-2$
oder $3-11=(3-3)-(11-3)=0-8=-8$

Solche Zeichen $0-2$ oder -2 und $0-8$ oder -8 überhaupt $0-a$ oder $-a$ haben daher so lange keinen denkbaren Sinn, als man es nicht mit Größen bestimmter Art zu thun hat. Aus der Betrachtung der Eigenschaften mancher Größen kann man ihnen jedoch oft eine bestimmte Bedeutung beilegen.

Z. B. 1) Einer habe im ersten Spiele 7 fl. gewonnen, im andern 16 fl. verloren, im dritten 13 fl. gewonnen, im vierten 11 fl. verloren; es fragt sich, wie viel er gewonnen habe?

Da der Verlust den Gewinn vermindert, so setzt man an:

$$7 - 16 + 13 - 11 = (7 + 13) - (16 + 11)$$
$$= 20 - 27 = 0 - 7 = -7$$

Die Rechnung gibt hier an, daß er im Ganzen 20 fl. gewonnen, aber 27 fl. verloren habe. Es läßt sich also eigentlich auf die Frage: wie viel gewonnen worden, nur antworten: Nichts, und die Frage wurde unter der irrigen Voraussetzung eines Gewinnes eigentlich unrichtig gestellt. Hätte man aber gefragt, wie viel verloren worden, so wäre der Gewinn eine Verminderung des Verlustes gewesen; also hätte man angesetzt:

$$-7 + 16 - 13 + 11 = (16 + 11) - (7 + 13) = 27 - 20 = 7$$

und erhalten 7 fl. Verlust nach Abzug des Gewinns.

Oben hat sich aber ergeben -7 unter der Voraussetzung eines gemachten Gewinnes; diese bezeichnen also gerade das Entgegengesetzte des Gewinnes, nämlich Verlust. Ging man dagegen vom Verlust aus und betrachtete den Gewinn als Abzug vom Verlust, so erhielt man die Zahl 7 selbst.

2) Von dem Ort A eines Stollens aus führt in einem Bergwerke ein Schacht 37 Fuß senkrecht in die Höhe nach B, aus dieser Höhe ein anderer 156′ in die Tiefe nach C, und von da ein dritter 100 Fuß in die Höhe nach D: um wie viel Fuß ist D über dem Punkt A erhöht?

Die Senkung vermindert die Erhöhung und umgekehrt; man setze also an:

$$37 - 156 + 100 = (37 + 100) - 156 =$$
$$137 - 156 = 0 - 19 = -19 \text{ Fuß Erhöhung,}$$

d. h. man steht nicht höher als A, sondern sogar 19 Fuß unter A.

Wäre man von der Voraussetzung ausgegangen, man stehe tiefer, so wäre anzusetzen gewesen:

$$-37 + 156 - 100 = 156 - 137 = 19.$$

Die Größe nun, von welcher man ausgeht bei der Betrachtung und die man als vermindert durch die andere annimmt,

nemt man die gesetzte oder positive Größe, die andere die entgegengesetzte, vermindernde oder negative.

Beide gegeneinander entgegengesetzte Größen, da man von jeder ausgehen kann.

Da sich nun in solchen Aufgaben das Ergebniß — 19 oder oben — 7 nur auf die, als entgegengesetzt oder negativ angenommene Größe beziehen kann, so nennt man die Zeichen solcher Zahlen, welche, ohne mit andern verbunden zu seyn, (—) vor sich stehen haben, auch negative Zahlen. Man sieht, daß in Verbindung mit andern Zahlzeichen selbst das erste Glied (—) vor sich haben kann, da hier blos die Ordnung geändert werden darf, um den richtigen Sinn der Verbindung zu erhalten, z. B.:

$$-5-6-7+8-9+100=(100+8)-(5+6+7+9)$$
$$=108-27=81.$$

oder daß z. B. — 9 auch für sich allein betrachtet, aber mit andern verbunden einen Ausdruck geben kann, der sich berechnen läßt. Z. B. $8+(17-5+[-9])=$

$$8+17-5+(-9)=8+17-5-9=$$
$$(8+17)-(5+9)=25-14=11$$

wenn man nämlich nach obiger Regel (67) verfährt. Ueberhaupt sieht man aus dieser Regel, daß man schreiben kann:

$$a+(-b)=a-b$$
$$a-(-b)=a+b$$

was man auch wohl so ausdrückt: negative Größen werden addirt, wenn man sie als Größen, an sich betrachtet, subtrahirt; subtrahirt werden sie, wenn man sie als solche addirt.

Noch ist ein besonderer Fall zu erwägen: Gesetzt, Einer sey an A schuldig 270 fl., habe von B einzunehmen 240 fl., von C 300 fl., dagegen schulde er an D 270 fl.; wie groß ist sein Vermögen?

Da sich Schulden und Vermögen gegenseitig vermindern, so ist, je nachdem man von dem einen ausgeht, das andere negativ oder abzuziehen. Man hat also:

$$-270+240+300-270=(240+300)-$$
$$(270+270)=540-540=0$$

Die Regel, daß man von der Summe der additiven Glieder die Summe der subtractiven abzuziehen habe, läßt sich hier auch so ausdrücken: das wahre Vermögen ist der Unterschied aller Vermögensposten weniger der Summe aller Schuldposten.

Ist nun, wie in diesem Beispiele, der Minuend dem Subtrahenden gleich, so bleibt für das Vermögen Nichts.

Eben so würde, wenn man von der Voraussetzung, es sey ein Ueberschuß an Schulden vorhanden, ausgegangen wäre, Nichts als Betrag der wahren Schuld sich ergeben haben.

Man sagt also auch wohl, 0 stehe immer zwischen den positiven und negativen Größen, wo dann die negativen kleiner als 0 würden und zwar desto kleiner, je weiter sie von 0 abstehen: eine Behauptung, die nur so verstanden werden darf, daß Zahlen mit (—), wenn sie mit andern verbunden sind, diese desto mehr vermindern, je größer sie ohne Rücksicht auf das Zeichen (—) sind.

Z. B. Jene 19 Fuß Senkung in obiger Aufgabe 2. sind keine Erhöhung; aber sie zeigen nicht einmal eine Gleichstellung mit dem bisherigen Standort, sondern eine Verminderung der Höhe an, die dieser bereits hat. Sie sind also, da 0 Fuß Erhöhung die Gleichstellung andeutete, als eine Zahl zu betrachten, die weniger als 0 Fuß Erhöhung beträgt. Fügt man 19 Fuß Erhöhung hinzu, so kommt man erst zu 0 Fuß Erhöhung.

Hat man die Zahlreihe:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

so kann man zuzählend von links nach rechts, abzählend von rechts nach links von jedem Punkt ausgehen, und hieraus wird die Verminderung und Vermehrung der Glieder, je weiter sie von 0 abstehen, deutlich.

Beispiele zur Uebung.

1) Wenn Einer 87 Meilen vorwärts reis't, darauf 48 zurückgeht, sodann 39 vorwärts und wieder 59 zurückgeht, wie weit ist er von dem ersten Orte entfernt und in welcher Richtung?

2) Eine Person habe fünf Spiele gespielt; im ersten gewann sie 8 fl., im zweiten verlor sie 7 fl., im dritten ver-

lor sie 11 fl., im vierten 13 fl., aber im fünften gewann sie 10 fl., wie viel hat sie gewonnen?

3) Ansbach liegt etwa 100 Fuß höher als Nürnberg, Erlangen 140 Fuß tiefer als Ansbach, München 680 Fuß höher als Erlangen: wie hoch liegt München über Nürnberg?

§. 5.

Wissenschaftliche Uebersicht der Addition und Subtraction.

Dem tiefer nachdenkenden Schüler wird zwar die Richtigkeit der im vorigen §. aufgeführten Sätze einleuchten und er wird sich derselben in Beispielen versichern können, die aus jeder Art der Größe genommen sind. Vielleicht wirft er aber die Frage auf, wie man denn dahin komme, gerade diese Sätze hier aufzustellen? Er wird die Sätze selbst erfinden wollen und hier wird folgender Fingerzeig hinreichen, ihn zurecht zu weisen.

In der allgemeinen Betrachtung der Größe findet man, daß sie entweder für sich besteht, oder Summe, oder Unterschied ist. Sie läßt sich also bezeichnen durch a, a+b, a—b. Nun hat man zwei Arten der Verbindung der Größen: Addition und Subtraction. Stellt man also die drei Ausdrücke: a, a+b, a—b durch die beiden Verbindungszeichen + und — auf alle mögliche Weisen zusammen, so erhält man alle additive und subtractive Verbindungen oder Formen. Die nähere Betrachtung jeder einzelnen führt dann auf die angeführten Sätze:

Formentafel.

a+(b+c) (a+b)+c a—(b+c) (a+b)—c
a+(b—c) (a—b)+c a—(b—c) (a—b)—c
(a+b)+(c+d) (a+b)—(c+d)
(a+b)+(c—d) (a—b)+(c+d) (a+b)—(c—d) (a—b)—(c+d)
(a—b)+(c—d) (a—b)—(c—d)

Nimmt man irgend eine dieser Formen, z. B.

a—(b—c)

heraus, so sagt sie, daß ein Unterschied von einer Größe abzuziehen sey. Bedenkt man nun, daß der Unterschied der Minuend

ist, vermindert um den Subtrahenden, so wird, wenn man von der Zahl den Minuenden des Unterschieds ganz abzieht, um den Subtrahenden zu viel abgezogen; es kommt also um so viel weniger heraus, als der Subtrahend beträgt: den richtigen Werth des Ausdrucks stellt man also wieder her, wenn man den Subtrahenden addirt. Dieß gibt also den Satz (63) oder die Bezeichnung desselben:

$$a-(b-c)=(a-b)+c$$

Oder man betrachte die Form:

$$(a-b)+c$$

so verlangt sie, daß ein Unterschied um eine Größe vermehrt werde. Offenbar hängt aber der Werth des Unterschieds sowohl vom Minuenden als Subtrahenden ab. Wird nämlich der Minuend vermehrt, so wird der Unterschied gegen den Subtrahend größer; nimmt der Subtrahend ab, so vermehrt sich der Unterschied ebenfalls: man hat also Satz (59) oder die Gleichungen:

$$(a-b)+c=(a+c)-b$$
$$(a-b)+c=a-(b-c)$$

Betrachtet man dagegen:

$$(a-b)-c$$

so vermindert man den Unterschied um desto mehr, je mehr man von a wegnimmt, oder auch je mehr man zu b hinzufügt, was sodann Satz (60) gibt, oder die Gleichungen:

$$(a-b)-c=(a-c)-b$$
$$(a-b)-c=a-(b+c)$$

Eben so bei den übrigen Formen. Man bemerkt übrigens, daß oben nicht alle Sätze aufgeführt sind, die sich aus dieser Betrachtung der Formen ergeben, und mag folgende Gleichungen näher prüfen:

69) $(a+b)-(c+d)=(a-c)+(b-d)$

70) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$

von welchen die erste die beiden Sätze ausdrückt, je nachdem man sich den Ausdruck links in den rechts oder umgekehrt umgewandelt denkt:

a) Der Unterschied zweier Summen ist gleich der Summe der Unterschiede ihrer einzelnen Summanden.

b) Die Summe zweier Unterschiede ist gleich dem Unterschied der Summe ihrer Minuenden und der Summe ihrer Subtrahenden.

Die andere Gleichung:

a) Ist ein Unterschied von einem andern abzuziehen, so addire man die Glieder des zweiten umgekehrt zu den Gliedern des ersten und ziehe von der ersten Summe die andere ab.

b) Ist eine Summe von einer andern abzuziehen, so ziehe man vom einen Summanden der ersten Summe den einen Summanden der zweiten ab, vom andern der zweiten den andern der ersten und letztern Unterschied vom erstern.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise lassen sich die oben aufgestellten und nur einseitig betrachteten Gleichungen doppelt lesen. Doch sind die meisten derselben unter besondern Nummern wiederholt aufgeführt.

Dritter Abschnitt.

Vom Multipliciren.

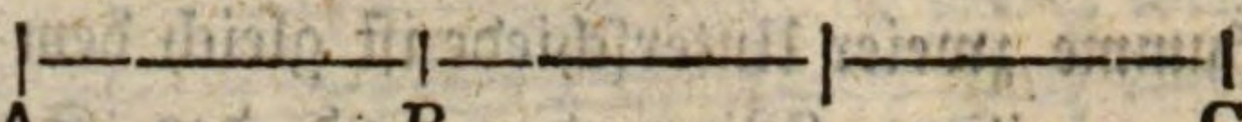
§. 1.

Allgemeine Betrachtung der Multiplication.

71) Addirt man eine Größe zu sich selbst, so sagt man, sie sey verdoppelt, zu dem Doppelten dieselbe Größe addirt, gibt das Dreifache u. s. f. Ueberhaupt sagt man, eine Größe werde mit einer Zahl vervielfacht, multiplicirt oder eine Zahl mal genommen, wenn sie so oft als Summand gesetzt wird, als eine Zahl Einer hat, oder, wenn man sie für die Einer der einen Zahl setzt; und eine Größe sey durch Multiplication erzeugt, wenn sie aus einer andern Größe so entstanden ist, wie eine gewisse Zahl aus der Eins.

Z. B. $5+5+5+5=20$, $7+7+7=21$

wo 20 das Vierfache von 5, 21 das Dreifache von 7 heißt. So ist auch AC das Dreifache von AB.



Man sieht, daß eine solche Summe gleicher Summanden blos von der Größe dieses Summanden und der Zahl abhängt, die angibt, wie viel Summanden man hat. Wie man also mit Worten statt 5 und 5 und 5 und 5 kurz spricht 4 mal 5, so läßt sich dieß auch kurz bezeichnen, wenn man statt des Wortes Mal (.) setzt *). So hat man dann:

$4+4+4 = 3.4$, $2+2+2+2+2 = 5.2$

oder $AC = 3.AB$.

72) Den gleichen Summanden heißt man hier Multiplicand (Größe, welche zu vervielfachen ist), die Zahl, welche anzeigt, wie oft er zu nehmen, Multiplicator; das, was herauskommt, Product.

73) Es erhellet, daß der Multiplicand jede beliebige Größe seyn kann, der Multiplicator aber eine reine Zahl seyn muß. Das Product ist immer gleichartig mit dem Multiplicanden. Z. B. 3 mal die Linie AB gibt die Linie AC; 2 mal 3 fl. ist 6 fl.; 2 mal 4 ist 8.

Zusatz 1. Uneigentlich spricht man auch von der Multiplication mit 1 und sagt: jede Größe kann als Product aus sich selbst und der Eins betrachtet werden, oder 1. $a = a$.

Zusatz 2. Man kann sich alle benannte Zahlen als Product der reinen Zahl und ihrer besondern Einheit denken. Z. B. 7 fl. als 7 Summanden, deren jeder so viel Silber enthält, als man mit dem Wort Gulden bezeichnet; 200 Fuß als 200 mal 1 Fuß.

Zusatz 3. Wie man in einzelnen Fällen bestimmte Größen vervielfacht, z. B. Linien, Flächen, Körper, Zeiten, Kräfte, gehört theils den Theilen der Mathematik an, die sich mit ihnen beschäftigen, theils bei wirklicher Ausführung den einzelnen Künsten und Handwerken. Hier umfaßt man in der Betrachtung die übrigen Größen nur in so weit, als sie Einheit der Zahl seyn können.

---

*) Einige setzen statt (.) auch (×) zwischen den Multiplicanden und Multiplicator.

74) Hat man eine benannte Zahl zu multipliciren, so multiplicirt man blos die reine Zahl und bezieht das Product auf die Einheit, welche der Multiplicand hatte. Z. B. 2 mal 3 fl. ist 3 fl. + 3 fl. oder (3 + 3) fl. oder 6 fl.

Anmerk. Man muß nicht glauben, daß, wenn man 2 mal 3 Fuß ist 6 Fuß spricht, dann die 3 Fuß wirklich zweimal dargestellt seyen. Dieß wäre das Geschäft des Zeichners, des Handwerkers, der eben die Länge, die man Fuß nennt, 6 mal an einander zu setzen hätte. Sondern man erfährt durch diese Multiplication blos, wie viel einzelne Fuß 2 mal 3 Fuß ist, um die Uebersicht der Größe 2 mal 3 Fuß und ihre Darstellung zu erleichtern.

75) Ist eine reine Zahl zu multipliciren, so kann man den Multiplicanden mit dem Multiplicator vertauschen, ohne daß sich das Product ändert. Z. B.

. . . . .
. . . . .
. . . . .

Fünf Einheiten, deren jede drei ist, sind gleich drei Einheiten, deren jede fünf ist. 5. 3 = 3. 5.

Zusatz. In diesem Falle kann man Multiplicand und Multiplicator mit dem gemeinschaftlichen Namen Factor benennen.

76) Sollen mehrere Zahlen untereinander multiplicirt werden, so hat dieß keinen andern Sinn, als: man soll die erste mit der zweiten, dieses Product mit der dritten u. s. f. multipliciren. Z. B.: 2. 3. 5. = (2. 3). 5 = 6. 5 = 30.

Zusatz 1. Auch hier kann die Multiplication bei reinen Zahlen in willkührlicher Ordnung geschehen. Z. B.

2. (2. 3) = 2. 3 + 2. 3 = (3 + 3) + (3 + 3) = 3 + 3 + 3 + 3
= 4. 3 = (2. 2). 3.

Aber auch 4. 3 = 3. 4 = 4 + 4 + 4 = 3. (2. 2).

Man kann daher, wenn m, n, p reine Zahlen bezeichnen, m. n. p = (m. n.) p = m. (n. p) = (m. p) n u. s. w. schreiben, d. h. eine Reihe von Factoren kann man ohne Klammern durch das Multiplicationszeichen verbinden. Nur ist immer zu bedenken, daß bei der wirklichen Multiplication irgend eine Ordnung angenommen werden müsse.

Zusatz 2. Dieß läßt sich auch so ausdrücken: Es kommt Gleiches, wenn ich mit einer Zahl selbst oder mit ihren Factoren nach einander multiplicire. Z. B. 6. 5 = 30 aber, auch = (3. 5). 2 oder 15. 2 = 30.

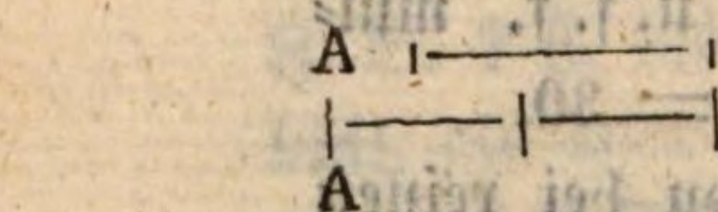
Anmerk. Gewöhnlich läßt man bei allgemeiner Bezeichnung der Factoren durch Buchstaben das Zeichen (.) weg und das bloße Nebeneinanderstehen der Buchstaben deutet an, daß die Zahlen zu multipliciren sind, welche sie bezeichnen. Statt a. b. c. schreibt man wohl öfter abc.

77) Hat ein Product mehrere Factoren, so kann nur einer eine benannte Einheit haben. Sieht man ab von dieser, so kann man, wie bei reinen Zahlen, die übrigen in willkührlicher Ordnung multipliciren und dem Product die anfängliche Benennung geben. Z. B.

5 mal 2 fl. ist 2 mal 5 fl. oder 10 fl.
2 mal 18 ß. ist 18 mal 2 ß.
Aber auch 7.3.(4 fl.) = (7.3.4.) fl.

Anmerk. So oft mit Buchstaben eine Multiplication angezeigt ist, bezeichnen sie reine Zahlen, es sey denn, daß die Benennung oder Einheit des Products ausdrücklich angegeben wäre.

78) Eine Größe wird mit einer Summe multiplicirt, wenn man sie mit den Summanden multiplicirt und die Producte addirt. Z. B. die Linie A soll (3 + 2) mal genommen werden.



Nimmt man A 3 mal, so sey dieß AC und 2. A = CD, so ist AC + CD = AD = 5 A = (3 + 2) A.

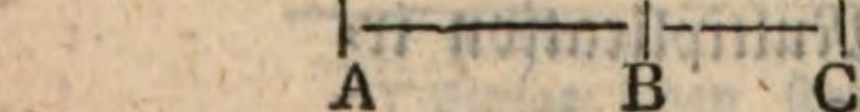
Eben so:

(3 + 2). 7 = 3. 7 + 2. 7 = 21 + 14 = 35

Es ist also immer:

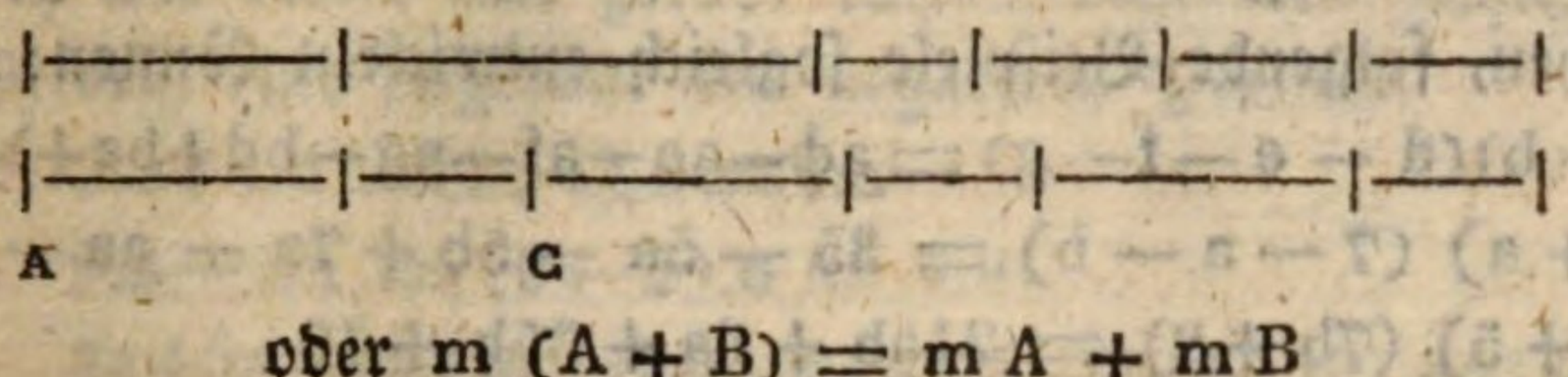
(m + n) A = mA + nA

79) Soll man eine Summe zweier gleichartiger Größen multipliciren, so kann man die einzelnen Summanden multipliciren und die Producte addiren. Z. B.



Soll (AB + BC) 3 mal genommen werden,

so ist dieß = 3. AB + 3. BC.

Z. B. 

$$\text{oder } m\,(A+B) = m\,A + m\,B$$

80) Auf gleiche Weise für Unterschiede:

$$(a-b)\,A = a\,A - b\,A$$

$$m\,(A-B) = m\,A - m\,B$$

Eben so $m\,(A+B-C) = m\,A + m\,B - m\,C$ nach (66).

81) Folgende Verbindungen lassen sich leicht aus diesen Sätzen herleiten, und sind besonders bei reinen Zahlen wichtig.

1) $(a+b)\,(m+n) = a\,(m+n) + b\,(m+n) = am+an+bm+bn$

2) $(a+b)\,(m-n) = a\,(m-n)+b\,(m-n) = am-an+bm-bn$

3) $(a-b)\,(m-n) = a(m-n)-b(m-n) = am-an-(bm-bn)$
$= am-an-bm+bn$

Z. B.:

$(4+5)\,(2+3) = 4.2+4.3+5.2+5.3 = 8+12+10+15 = 45$
$= 9.5 = 45$

$(2+5)\,(6-2) = 2.6-2.2+5.6-5.2 = 12-4+30-10 = 28$

$(5-2)\,(6-3) = 5.6-5.3-2.6+2.3 = 30-15-12+6 = 9$
$= 3.3 = 9.$

82) So lassen sich auch Produkte aus zwei mehrtheiligen Factoren und Produkte aus mehreren zwei und mehrtheiligen Factoren finden.

a) Für zwei Factoren:

$(a+b-c)\,(d-e-f) = ([a+b]-c)\,([d-e]-f)$
$= (a+b)\,([d-e]-f) - c\,([d-e]-f)$
$= a\,([d-e]-f)+b\,([d-e]-f) - (c\,[d-e]-f)$
$= a\,(d-e)-af+b\,(d-e) - bf-[c(d-e)-cf]$
$= ad-ae-af+bd-be-bf-[cd-ce-cf]$
$= ad-ae-af+bd-be-bf-cd+ce+cf$

Hieraus sieht man zuvörderst, daß hier, wie oben in (81. 1, 2, 3) jedes Glied des einen Factors mit jedem Gliede des andern multiplicirt ist; rücksichtlich der Zeichen ergibt sich aber die Regel: haben beide Factoren gleiche Zeichen (++ oder −−), so erhält das Produkt (+), haben sie ungleiche, so erhält es (−).

Nach diesen Regeln wird man also, ohne die Ableitung durchzumachen, folgende Beispiele sogleich entwickeln können:

$(a-b)(d-e-f-g) = ad-ae-af-ag-bd+be+bf+bg$

$(5+a)(7-a-b) = 35-5a-5b+7a-aa-ab$

$(3a+5)(7b+2) = 21ab+6a+35b+10$

Zur Uebung mögen nachfolgende dienen:

$(3-a)(5-b) = 15-3b-5a+ab$

$(7+a+b)(5-b) = 35-7b+5a-ab+5b-bb$

$(ab+bc)(c+d) = ?$

$(mn-np)(pq+rs) = ?$

$(2a+3b)(5a-7c) = ?$

$(6a-15b)(3a-9bc+c) = ?$

b) Für drei und mehr Factoren werden die unter a, angegebenen Regeln wiederholt angewendet, z. B.:

1) $(a+b)(c+d)(e+f) = (ac+bc+ad+bd)(e+f) =$
$ace+bce+ade+bde+acf+bcf+adf+bdf.$

2) $(a-b)(c-d)(e-f) = (ac-bc-ad+bd)(e-f) =$
$ace-bce-ade+bde-acf+bcf+adf-bdf.$

Hält man die Zeichen dieser letzten Produkte gegen die Zeichen der Factoren, so läßt sich die Regel aufstellen, daß wenn die Factoren eine gerade Anzahl von Subtraktionszeichen haben, das Produkt (+), bei einer ungeraden Anzahl von Subtraktionszeichen (—) erhält. Dieß bestätigt sich auch bei vier und mehr Factoren. Z. B.

$(a+b)(c-d)(e-f)(g-h) = aceg+bceg-adeg-bdeg$
$-acfg-bcfg+adfg+bdfg-aceh-bceh+adeh+bdeh$
$+acfh+bcfh-adfh-bdfh.$

83) Dabei ergeben sich folgende besondere Formen, die, mit andern Ausdrücken verbunden, ein richtiges Ergebniß liefern, ob sie gleich außer dem Zusammenhang und für sich allein betrachtet nicht vorkommen können.

1) $(a-a).b = a.b-a.b$ oder $o.b = o.$ Nach (50)

2) $(o-a)b = (-a)b = ob-ab = o-ab = -ab$ Nach (68)

3) $(o-a)(o-b) = (-a)(-b) = o.o-o.b-o,a+ab = +ab$

4) $(o-a)(o-b)(o-c) = (-a)(-b)(-c) = -abc$

5) $(o+a)(o-b)(o-c) = (+a)(-b)(-c) = +abc$

Wörtlich wie oben: eine gerade Anzahl negativer Zahlen gibt ein positives, eine ungerade ein negatives Produkt.

84) $3.a+4.a = (3+4).a = 7.a$

$9.a-5a = (9-5).a = 4.a$

$3a+5a-7a+9a-10a = (3+5-7+9-10)\,a = o$

$3ab+5ac+7ad = (3b+5c+7d).a$

$mn+mpq+mrq = (n+pq+rq)\,m = (n+q\,[p+r])\,m$

Alle diese Ausdrücke entstehen aus (78,79 u. 80) und lassen sich nach folgender Regel bilden: Hat man eine Größe in verschiedenen einzelnen Produkten als Multiplicand, so kann man die Zahlen, mit welchen sie multiplicirt ist, mit dem Zeichen der Produkte verbinden, und damit die Größe multipliciren.

Oder, für Zahlen:

Haben mehrere durch Addition oder Subtraction verbundene Produkte einen gleichen Factor, so kann man die ungleichen Factoren mit den Zeichen der Produkte verbinden und damit den gleichen multipliciren.

Anmerk. 1. Man nennt dieß das Herauswerfen des gemeinschaftlichen Factors, oder das Zusammenfassen der Produkte.

Anmerk. 2. Man sieht, daß das Addiren und Subtrahiren benannter Zahlen immer als ein solches Addiren und Subtrahiren von Produkten betrachtet werden kann.

Z. B. $7\text{ fl.} - 3\text{ fl.} + 9\text{ fl.} = (7-3+9)\text{ fl.} = 13\text{ fl.}$

Zur Uebung:

$ab+bc+ad+af+bg+bh = a\,(b+d+f)+b\,(c+g+h)$

$7a+9b-8a-5b-7c-9c+18c+8a = ?$

$16a-5b-7c-8d-9e+10b+d-4e = ?$

$ah+(5b-7c-dc) = ?$

$ab-(7b-9b+8a) = ?$

$ab-(5b-[7a+9b]+15\,a) = ?$

$abc+abd = abe-abf = ?$

$abc+ab+ad-ae = ?$

Besondere Fälle sind nach (73 Zus. 1.)

$a+ab = 1.a+a.b = (1+b)\,a$

$ab-b = b.(a-1)$

Darnach folgende:

$$ab + ac + a = a(b + c + 1).$$
$$ab - ac - a = a(b - c - 1).$$
$$ab - 3a + a - a = a(b - 3 + 1 - 1) = a(b - 3).$$

Nach (81) lassen sich auch mehrere Produkte zu einem Produkte zusammenfassen, in welchem beide Factoren mehrtheilig sind. Z. B.

$$am + bm + an + bn = (a + b)\,m + (a+b).\,n =$$
$$(a + b)\,(m + n)$$
$$am - an + bm - bn = a(m-n) + b(m-n) = (a+b)(m-n)$$
$$am - an - bm + bn = ?$$

Im letzten Fall geben die beiden ersten Produkte sogleich $a(m-n)$, aber die beiden andern würden $b(n-m)$ geben, was dann mit dem ersten Produkte keinen gemeinschaftlichen Factor hätte. Hier verändert man zuerst die Zeichen der beiden letzten Glieder nach (66 Zus.) und macht aus $- bm + bn = -(bm-bn)$; dieß ist dann $- b(m-n)$ und daher:

$$am - an - bm + bn = am - an - (bm - bn)$$
$$= a(m-n) - b(m-n) = (a-b)\,(m-n).$$

Besondere Fälle sind:

$$am + a + bm + b = a(m+1) + b(m+1) =$$
$$(a+b)\,(m+1)$$
$$am + a + m + 1 = a(m+1) + (m+1) = (a+1)(m+1)1.$$

Zur Uebung:

$$am - bm + ap - bp + an - bn = (a-b)m + (a-b)p + (a-b)n = ?$$
$$am - an - a + bm - bn - b = ?$$
$$ag - ah - ak - bg + bh + bk - cg + ch + ck - dg + dh + dk = ?$$
$$ad - af - ag + bd - bf - bg - cd + cf + cg = ?$$
$$ace + acf - ade - adf - bce - bcf + bde + bdf = ?$$

85) Nimmt man 82, 83 und 84 zusammen, so lassen sich folgende Umänderungen leicht erklären und ausführen:

$$(a+b)\,(a+b) = aa + ab + ab + bb = aa + 2ab + bb$$
$$(a-b)\,(a-b) = ?$$
$$(a+b+c)\,(a+b+c) = aa + 2ab + bb + 2(a+b)\,c + cc$$
$$(a+b+c+d)\,(a+b+c+d) = ?$$
$$(a+b)\,(a+b)\,(a+b) = aaa + 3aab + 3abb + bbb$$

$(a+b)\ (a+b)\ (a+b)\ (a+b) = ?$

$(a+b+c)\ (a+b+c)\ (a+b+c) = ?$

$(a-b)\ (a-b)\ (a-b) = ?$

$(a+b)\ (a-b) = aa+ab-ab+bb = aa-bb$

$(a+1)\ (a-1) = aa-1$

$(a+1)\ (a+1) = aa+2a+1$

$(a+1)\ (a+1)\ (a+1) = aa+3aa+3a+1$

$(a-1)\ (a-1) = ?$

$(a-1)\ (a-1)\ (a-1) = ?$

$(a-b)\ (aa+ab+bb) = aaa-bbb$

$(a-b)\ (aaa+aab+abb+bbb) = ?$

$(a+b)\ (aa-ab+bb) = ?$

$(a+b)\ (aaa-aab+abb-bbb) = ?$

Von der Richtigkeit folgender Sätze kann man sich durch Anschauung bei beliebigen Größen überzeugen.

86) Gleiche Größen mit gleichen Zahlen multiplicirt, oder gleich oft genommen, geben gleiche Produkte. Oder in Zeichen:

Ist $A = B$ und $m = n$, so ist

$$mA = nB$$

87) Größeres und Kleineres gleich oft genommen, gibt Größeres und Kleineres. Oder:

Ist $A > B$, $m = n$,

so ist $mA > nB$

88) Gleiches öfter und weniger oft genommen, gibt Größeres und Kleineres. Oder:

Ist $A = B$, $m > n$

so ist $mA > nB$

89) Größeres und Kleineres öfter und weniger oft genommen, gibt Größeres und Kleineres. Oder:

Ist $A > B$, $m > n$, so ist

$$mA > nB$$

90) Größeres und Kleineres mit kleineren und größeren Zahlen multiplicirt, gibt Unbestimmtes.

Ist $A > B$ $m > n$, so ist

$$mA \lessgtr nB$$

§. 2.

Multiplication der Zahlen.

91) Da beim Multipliciren einer Zahl mit einer andern die eine Zahl so oft als Summand gesetzt wird, als die andere Einheiten hat, so kann man jedes verlangte Produkt zweier Zahlen durch Addition erzeugen. Z. B.:

$$5 . 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35.$$

Zur Erleichterung behält man alle so erzeugte Produkte der einzifferigen Zahlen mit einzifferigen im Gedächtniß, und stellt sie gewöhnlich in folgender Tafel zusammen, die man das Einmaleins nennt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Nach dieser Tafel lassen sich nicht bloß Einer mit einzifferigen Zahlen multipliciren, sondern auch Zehner, Hunderte, Tausende, kurz Zahlen jeder höhern Einheit. Z. B.:

$$5 . 70 = 5 . 7 . 10 = 35 . 10 = 350$$
$$5 . 800 = 4000$$
$$4 . 2000 = 8000 \text{ u. s. w.}$$

Man multiplicirt nämlich jede Anzahl höherer Einheiten wie eine einfache Zahl, und gibt dem Produkt so viel Nullen

als der Factor hatte. Aber auch einfache Zahlen höherer Einheiten mit andern dergleichen, gibt die Tafel an. Z. B.

400 . 2000, so ist dieß (4 . 2000) 100 = 8000 . 100 = 800000

d. h. Man multiplicire sie ohne Rücksicht auf die Stelle und gebe dem Produkt so viel Nullen, als beide Zahlen zusammen haben.

40 . 7000 = 280000. 300 . 80000 = 24000000.

92) Das Produkt einer vielzifferigen Zahl und einer einzifferigen findet man nun nach folgender Regel:

Man multiplicire von rechts nach links gehend mit Hilfe des Einmaleins jede Ziffer der vielzifferigen Zahl mit der einzifferigen. Jedes dieser Produkte schreibe man, wenn es eine einzifferige Zahl ist, in derselben Stelle an, in welcher die Ziffer der vielzifferigen Zahl steht; ist es eine zweizifferige Zahl, so setze man bloß die niedrigste Ziffer an, die höhere addire man gleich zum folgenden Produkte; das letzte Produkt schreibe man ganz an.

Beispiel 3 . 956 = 2868, 5 . 7801 = 39005

Man kann sich dieß so erklären (74)

956	7801
3	5
18	5
150	00
2700	4000
2868	35000
	39005

Zusatz. Hat die mehrzifferige Zahl Nullen an sich, so multiplicire man, ohne auf diese Rücksicht zu nehmen, und hänge dem Produkt so viel Nullen an, als der Factor hatte. Z. B.

456000
9
4104000 d. h. 456000 . 9 = 4104000

93) Um das Produkt zweier vielzifferiger Zahlen zu finden, multiplicire man nach (82) jede einzelne Theilzahl des einen Factors mit jeder einzelnen des andern und addire die Produkte. Z. B.

$$32 \cdot 465 = (30 + 2)(400 + 60 + 5) = 30 \cdot 400 + 2 \cdot 400 + 30 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 30 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 12000 + 800 + 1800 + 120 + 150 + 10 = 14880$$

Leichter geschieht dieß nach folgender Regel:

1) Schreibe die vielzifferigen Zahlen mit ihren gleichnamigen Stellen untereinander und ziehe darunter einen Horizontalstrich.
2) Multiplicire die obere Zahl mit jeder einzelnen Ziffer der untern nach (92) ganz durch und schreibe das Produkt so unter den Strich, daß die niedrigste Ziffer gerade unter die Ziffer zu stehen kommt, mit der man multiplicirt hat. Alle diese Produkte addirt, geben das verlangte Produkt.

Z. B.	465	753947
	32	7648
	930	6031576
	1395	3015788
	14880	4523682
		5277629
		5766186656

Zusatz 1. Es ist übrigens nicht nothwendig, daß man mit den Einern die Multiplication anfängt, man kann auch mit der höchsten Zahl anfangen und dann die Zahlreihen rechts hinausrücken:

753947
7648
5277629
4523682
3015788
6031576
5766186656

Zusatz 2. Hat man mit einer Zahl zu multipliciren, die nur eine Ziffer bei einer oder mehrern Einsen hat, so kann man kürzer so verfahren:

27 . 21	359 . 211	271 . 113
54	359	271
567	718	813
	75749	30623

Zusatz 3. Kommen Nullen in der untern Zahl vor, so rückt man beim Multipliciren um so viel Stellen weiter, als Nullen vorhanden sind: Z. B.

4567	107001	5001	10101 oder 5001
2005	50002	5001	5001
22835	214002	5001	5001
9134	535005	50515191	50515101
9156835	5350264002		

Zusatz 4. Um Verwechslungen zu vermeiden, setzt man oft in die leergelassenen Stellen Nullen; doch ist dieß nicht nothwendig. Z. B.

4567
2005
22835
913400
9156835

Zusatz 5. Endigt sich der eine Factor rechts in Nullen, so multiplicire, man ohne auf sie Rücksicht zu nehmen, und gebe dem Produkt so viel Nullen, als der Factor hatte. Z. B.

4567000
27
31969
9134
123309000

Zusatz 6. Haben beide Factoren am Ende rechts Nullen, so multiplicirt man ebenfalls, ohne die Nullen zu berücksichtigen, und hängt dem Produkt so viel Nullen an, als beide zusammen hatten. Z. B.

23000	5670000
5700	382000
161	1134
115	4536
131100000	1701
	2165940000000

94) Noch kann man sich folgender Vortheile bedienen, die aus der allgemeinen Betrachtung hervorgehen:

1) Nach (84) ist $5.7.3+3.5.9+4.5.3 = (7+9+4)\,5.3 = 20.15 = 300$

oder $7 . 8\,13 - 7 . 8 . 9 = 7 . 8\,(13 - 9)$
$= 56 . 4 = 224$

Z. B. Von 3 Erben erhielt der erste 271 fl., der zweite 7 mal so viel als dieser, der dritte 3 mal so viel als der zweite, wie viel betrug das Vertheilte?

$271 + 7 . 271 + 3 . 7 . 271 = (1 + 7 + 21)\,271 =$
$29 . 271 = 7859$

2) Hat man mit einer Zahl zu multipliciren, so kann man mit ihren Factoren nach einander multipliciren, was besonders bei zweizifferigen Zahlen (75) nützlich ist. Z. B.

$48 . 786 = 6 . 8 . 786$

786	oder	786
6		48
4716		6288
8		3144
37728		37728

3) Ist mit 9, 99, 999 u. s. w. zu multipliciren, so hänge man der Zahl so viel Nullen an, als 9 vorhanden sind und ziehe einmal die Zahl ab. Z. B.

$99 . 7856 = 785600$
7856
777744

$999 . 40503 = 40503000$
40503
40462497

Es erhellet dieß daraus, daß nach (79)

$99 . 7856 = (100 - 1)\ 7856 = 100 . 7856 - 7856.$

Auch wenn in der letzten Stelle rechts statt 9 eine andere Zahl stände, würde ein ähnliches Verfahren wenigstens bei vielen Nennern vorn vortheilhaft seyn. Z. B.

$99998 . 7834 = 783400000$
15668
783384332

Beispiele zur Uebung:

$73 . 137 = 10001$
$11 . 13 . 73 = 10439$
$19 . 521 = 9899$
$19 . 19 . 29 = 10469$

$$9997 \cdot 3845692 = 38445382924$$
$$15 \cdot 59 - 13 \cdot 59 = 118$$
$$212 \cdot 315 - 202 \cdot 315 = 3150$$

Vierter Abschnitt.

Von der Division.

§. 1.

Allgemeine Betrachtung.

95) Nur wenige Größen können unmittelbar aufgefaßt werden; die meisten übersteigen wegen Größe das Fassungsvermögen der menschlichen Sinne oder entziehen sich ihm wegen Kleinheit. Z. B. Die Länge eines Fußes, die Fläche eines Bogens Papier, die Größe eines Spielwürfels kann unmittelbar mit dem Gesicht und Gefühl erkannt werden. Auch für Kraft und Zeit sind gewisse mittle Größen wenigstens aus ihren Wirkungen leichter zu fassen. Z. B. so viel ein Mensch Gewicht tragen kann, so viel ist ihm eigentlich faßlich. Aber schon die Länge einer Meile kann man sich nicht mehr deutlich vorstellen, geschweige die Entfernung der Himmelskörper von der Erde; eben so wenig die Fläche einer Quadratmeile oder gar eines Landes; der Körperraum, den die Erde erfüllt, das Gewicht, das man nicht selbst heben kann. Umgekehrt hat man auch keine deutliche Vorstellung von dem Gewicht des Staubes, der, ohne daß man es fühlt, auf Einem liegt, von der Weite der Schweißlöcher der Haut u. s. f.

96) Solche Größen werden aber wenigstens verständlich, wenn man angibt, wie vielmal eine bekannte Größe in ihnen enthalten ist. Z. B. Von der Last eines Steines, den ich nicht heben kann, erhalte ich einen Begriff, wenn ich angebe, wie viel Zentner er wiegt; von der Länge einer Meile, wenn ich weiß, wie viel mal 1 Fuß in ihr umgeschlagen werden kann; von der Fläche, die man Quadratmeile nennt, wenn ich zeige, wie viel Quadratfuße sie bedecken u. s. w.

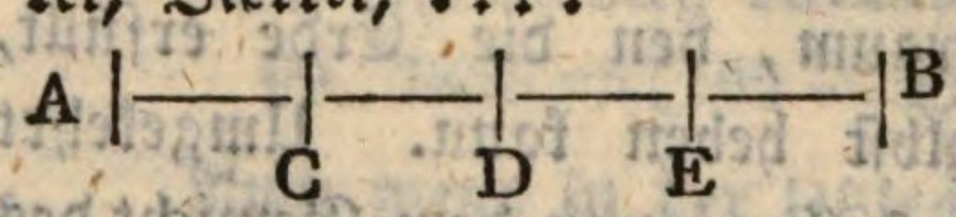
Von der Menge, die man hundert nennt, hat man nur dadurch einen Begriff, daß man weiß, sie enthält die bekannte Menge 10 zehnmal, oder man kann zehn Zehende aus ihr machen.

Angeben, wie oft eine bekannte Größe (Maß) in einer andern enthalten ist, heißt diese messen. Das Maß muß gleichartig seyn, mit dem, was man mißt. Das, was herauskommt, ist eine reine Zahl, und heißt der Quotient. Durch das Messen wird das Gemessene eine benannte Zahl, deren Einheit das Maß ist. Z. B. Eine Meile ist 24000 Längenfuß, eine Quadratmeile 576 Mill. Quadratfuß.

Nur die 10 ersten Zahlen sind Mengen, die man sich unmittelbar denkt; die folgenden schon durch 10 u. s. w. gemessene. Z. B. 90 ist eine Menge, die durch 10 gemessen 9 Einheiten hat.

Zusatz. Eine Größe ist also ganz bekannt, wenn man ihr Maß oder ihre Einheit und die Zahl dieser Einheiten kennt. Denn man braucht nur das Maß so oft zu nehmen, als die Zahl der Einheiten angibt. Z. B. Eine Größe, die 90 Einheiten hat, deren jede 100 ℔. oder 1 Centner ist, ist entweder 90 Centner oder 9000 ℔.

97) Wenn man eine Größe in 3, 4... gleiche Theile theilt, so benennt man diese Theile nach ihrer Anzahl: Drittel, Viertel, ...



Z. B. AC heißt ein Viertel von AB, oder AB durch 4 getheilt. Wenn das Ganze bekannt ist, so ist der Theil eine bekannte Größe. Z. B. Hier kann ich AC finden, wenn ich angebe, daß man es erhält, wenn man AB durch 4 theilt. Die reine Zahl 4 heißt der Theiler der Größe AB; der Theil AC ist immer gleichartig mit der getheilten Größe.

Zusatz. Wie man Größen, die sinnlich wegen ihres Umfangs nicht aufgefaßt werden können, durch Messen mit einer faßlichen Größe bestimmt, so kann man Größen, die sich wegen Kleinheit der sinnlichen Anschauung entziehen, dadurch bestimmen, daß man angibt, welcher Theil einer bekannten

Größe sie sind. Z. B. In einer Masse Flüssigkeit werde ein Tropfen einer andern aufgelöst: wie viel von dieser enthält ein Tropfen des Gemisches?

98) Ein solcher Theil kann wieder so oft man will zu einem neuen Ganzen verbunden seyn. Z. B. AD ist 2mal der vierte Theil von AB, AE 3mal der vierte Theil von AB. Hier heißt man AD, AE und alle andere aus Theilen von AB bestehende Linien Brüche von AB.

99) Gibt die Größe A durch die gleichartige a gemessen die reine Zahl m, so bezeichnet man dieß so:

$$\frac{A}{a} = m, \text{ z. B. oben } \frac{AB}{AC} = 4$$

Wird die Größe A durch die Zahl m getheilt, und erhält man dann den Theil a, so bezeichnet man dieß:

$$\frac{A}{m} = a, \text{ z. B. } \frac{AB}{4} = AC$$

Ist AC eine neue Größe, die durch Zusammensetzung des Theiles AC entsteht, so bezeichnet man dieß so:

$$AE = 3. \frac{AB}{4}$$

100) Wie man in vorkommenden Fällen theilt und mißt, muß bei den einzelnen Arten der Größen besonders gelehrt werden.

101) Auch bei Mengen gleichartiger Einheiten kann von einem Messen und Theilen die Rede seyn. Fragt man z. B. wie oft sind 4 fl. in 24 fl. enthalten, so wird verlangt, daß 24 fl. durch 4 fl. gemessen werde. Hier zieht man also 4 fl., so oft es angeht, von 24 fl. ab. Der Quotient ist auch hier eine reine Zahl, d. h. 6 Male.

$$\frac{24 \text{ fl.}}{4 \text{ fl.}} = 6$$

Fragt man dagegen: was ist der 6te Theil von 24 fl., so ist die Antwort 4 fl., d. h. wenn ich mir 21 fl. als 6 Summanden denke, so ist einer 4 fl., also eine mit 24 fl. gleichartige Größe.

$$\frac{24 \text{ fl.}}{6} = 4 \text{ fl.}$$

4 fl. ist ein Theil von 24 fl., 6 ist ein Theiler von 24 fl.

Beispiel 1. Fragt man, wie viel eine Person bekommt, wenn ihrer 7 zu gleichen Theilen 210 fl. erhalten?

2. Wie viel Personen, die 210 fl. zusammen besitzen, während bei der Vertheilung eine 30 fl. erhielt?

So ist dort die Antwort 30 fl., hier 7 Personen?

102) Das Maß so oft genommen, als der Quotient angibt, oder der Theil so oft genommen, als der Theiler anzeigt, gibt dort die gemessene, hier die getheilte Größe wieder. Z. B. Ist 24 fl.

$$\frac{6}{24\text{ fl.}} = 4\text{ fl.}, \text{ so ist } 24\text{ fl.} = 6.\ (4\text{ fl.})$$

Ist

$$\frac{24\text{ fl.}}{4\text{ fl.}} = 6, \text{ so ist } 24\text{ fl.} = 6.\ (4\text{ fl.})$$

Ist

$$\frac{A}{a} = m, \text{ so ist } A = ma$$

Ist

$$\frac{A}{m} = a, \text{ so ist } A = ma.$$

Zusatz. Man sieht, daß das Maß oder der Theil die Stelle der Multiplicanden, der Quotient und Theiler des Multiplicators einnimmt. Hiernach kann man auch sagen: das Produkt gemessen durch den Multiplicand, gibt den Multiplicator, und getheilt durch den Multiplicator, gibt es den Multiplicand. D. h. Ist 35 ft. = 5. (7 ft.), so ist

$$\frac{35\text{ ft.}}{7\text{ ft.}} = 5 \text{ und } \frac{35\text{ ft.}}{5} = 7\text{ ft.}$$

Zusatz 2. Man sieht zugleich, daß eine Größe in sich selbst 1mal enthalten ist, oder daß eine Zahl in so viel Theile getheilt, als sie selbst Einheiten hat, die Einheit gibt. D. h. $\frac{A}{A} = 1$ oder $\frac{m}{m} = 1$. Nach (71.1) ist auch $A=1.A$ und $m=1.m$

103) Da sich bei reinen Zahlen die Factoren verwechseln lassen (75), so ist es gleichgiltig, ob man hier mißt, oder theilt, Z. B. Ich erhalte dasselbe, wenn ich untersuche, wie oft 5 in 35 enthalten sey, und wenn ich frage, wie groß der fünfte Theil von 35 ist. In beiden Fällen erhalte ich 7 oder den andern Factor als Antwort. Messen und theilen fällt also hier in der Aufgabe zusammen, aus dem Produkt und dem einen Factor den andern zu bestimmen, oder eine Zahl zu suchen, die mit einer gegebenen multiplicirt, eine zweite gegebene erzeugt. Die letztere heißt Dividend, der erste bekannte Divisor, das Verfahren Dividiren.

104) Das Dividiren hat also bei benannten Zahlen (und genau genommen, auch bei reinen) zwei Formen Messen und Theilen, die aber bei der Ausübung nicht beachtet zu werden brauchen. Denn es ist eine benannte Zahl in einer gleichbenannten eben so oft enthalten, als die erste ohne Benennung in der zweiten auch ohne Benennung. Z. B. 5 fl. ist in 15 fl. eben so wohl, als 5 in 15, 3mal enthalten. Der fünfte Theil von 15 fl. ist 3 fl.; diese Zahl 3 erhält man auch durch Messen der reinen Zahl 15 durch die reine Zahl 3; nur muß man das Erhaltene auf fl. beziehen.

Wie beim Multipliciren, so kann man also auch beim Dividiren der benannten Zahlen von der Benennung absehen, und wie bei reinen Zahlen verfahren; nur muß man die Frage der Aufgabe immer wohl im Auge behalten und darnach die Antwort einrichten.

Z. B. 36 Zoll soll in 9 Theile getheilt werden. Man suche die Zahl, welche mit 9 multiplicirt 36 gibt, nämlich 4, und bemerke, daß dieß nun 4 Zoll sind.

Aber fragt man, wie oft 9 Zoll in 36 Zoll enthalten seyen, so suche man wieder die Zahl, welche angibt, wie oft 9 in 36 enthalten ist, nämlich 4, bemerke aber, daß 4 nunmehr eine reine Zahl ist. Denn die Antwort lautet 4 Male ist 9 Zoll in 36 Zoll enthalten.

Folgende allgemeine Grundsätze sind nunmehr verständlich.

105) Gleiches durch Gleiches gemessen und in gleichviel Theile getheilt, gibt gleiche Zahlen und gleiche Theile.

106) Das Größere und Kleinere gleich getheilt und durch Gleiches gemessen, gibt größere und kleinere Zahlen und Theile.

107) Gleiches durch Größeres und Kleineres gemessen, gibt kleinere und größere Zahlen. Gleiches durch kleinere und größere Zahlen getheilt, gibt größere und kleinere Theile.

108) Größeres und Kleineres durch Größeres und Kleineres gemessen, oder durch größere und kleinere Zahlen getheilt, gibt Unbestimmtes.

109) Größeres und Kleineres durch Kleineres und Größeres gemessen, oder durch kleinere und größere Zahlen getheilt, gibt größere und kleinere Zahlen und Theile.

§. 2.

Zifferrechnen.

110) Wenn man fragt, wie oft 5 in 40 enthalten, sowohl, als wenn man untersucht, was der 5te Theil von 40 ist, erhält man die Antwort dadurch, daß man die Zahl sucht, die mit 5 multiplicirt 40 gibt. Es lauft also das Dividiren auf das Multipliciren zurück, und man bedarf zum fertigen Dividiren das Einmaleins, wie zum Multipliciren. Dieses gibt bei zweizifferigen Zahlen sogleich die verlangte Antwort, z. B. wie oft ist 8 in 64 enthalten? Antw. 8 mal, da 8 . 8 = 64. Oder 7 ist in 42 6 mal enthalten, da 7 . 6 = 42.

111) Nicht immer läßt sich aber eine Zahl angeben, die mit der ersten multiplicirt die zweite gibt. Z. B. Was ist der 5te Theil von 36 fl.? Da es keine Zahl gibt, die 5 mal genommen 36 wäre, so nimmt man die nächst kleinere Zahl an 36, die sich durch 5 theilen läßt. Z. B. Hier 35 und bemerkt den Ueberschuß über 35 als Rest. Der Quotient ist also 7; denn 5 . 7 = 35. Man spricht; der 5te Theil von 36 fl. ist 7 fl. und 1 fl. bleibt übrig.

D. h. 36 fl. = 5 . 7 fl. + 1 fl. oder $\frac{36 \text{ fl.}}{5}$ = 7 fl., Rest 1 fl.

2. Beispiel. 18 dividirt durch 5 gibt 3, Rest 3, d. h.

18 = 3 . 5 + 3

die nähere Betrachtung dieses Restes im Abschnitt von den Brüchen. Hier läßt sich nur bemerken, daß er immer kleiner ist, als der Divisor.

112) Eine vielzifferige Zahl durch eine einzifferige zu dividiren.

Beispiel: 4 ist in 5824 wie oft enthalten?

4 |	5827 |	1000
	4|000 |	400
	18|27	50
	16|00	6
	22|7	1456
	20|0	
	27	
	24	
	3	

Wörtlich: 4 ist in 5000 1000mal enthalten; 1000mal 4 ist 4000, diese abgezogen von 5827 geben 1827; 4 ist in 1800 4 hundertmal enthalten, 4 mal 400 ist 1600; diese abgezogen von 1827 geben 227; 4 ist in 22 Zehnern 5 Zehner oder 50 mal enthalten, 4 mal 5 Zehner sind 20 Zehner oder 200; dieß von 227 läßt 27; 4 ist in 27 Einern 6 Einer mal enthalten, 6 mal 4 ist 24 von 27 bleibt 3: es ist also 4 in 5827 1456 mal enthalten und 3 bleibt.

Läßt man die Ziffern weg, die rechts hinter den Strichen stehen, so läßt sich das Ganze kürzer so bezeichnen:

```
4 | 5827 | 1456
  | 4    |
  ------
    18
    16
    --
    27
    24
    --
     3
```

und dann auf folgende Weise verfahren: 4 ist in 5 1 mal enthalten, 1.4 ist 4 von 5 bleibt 1; zu 1 setze ich 8 herunter. 4 ist in 18 4 mal enthalten: 4 mal 4 ist 16 von 18 bleibt 2; zu 2 setze ich 2 herunter, 4 ist in 22 5 mal enthalten; 5 mal 4 ist 20 von 22 bleibt 2, zu 2 nehme ich 7; 4 ist in 27 6 mal enthalten, bleibt Rest 3.

Zusatz. Bei einzifferigen Zahlen läßt sich die ganze Rechnung leicht im Kopfe machen, weßhalb man hier leichter so bezeichnet:

```
4 | 5827
  ----
  1456 (3
7 | 44816 18923
  ------------
  6402 31274 (5
```

113) Eine vielzifferige Zahl durch eine kleinere vielzifferige zu dividiren.

Regel 1) Schneide im Dividenden so viel Ziffern von links nach rechts ab, als der Divisor hat; ist ihr Betrag kleiner, als der Divisor, so nimmt man noch eine dazu.

2) Suche die größte Zahl, die angibt, wie oft die höchste Zahl des Divisors in der höchsten oder in den zwei höchsten Zahlen der abgeschnittenen Ziffern enthalten sey, und versuche, ob, wenn der ganze Divisor mit dieser multiplicirt wird, kein größeres Product kommt, als die abgeschnittenen Ziffern bezeichnen. Ist es größer, so nimm eine um 1 kleinere Zahl, und versuche, ob, mit dieser multiplicirt, ein gleiches oder kleineres Product kommt und so fort, bis dieses der Fall ist. Ist dieses Product kleiner, oder gleich den abgeschnittenen Ziffern, so setze es unter die Ziffern des Dividenden, ziehe ab und setze eine Stelle rechts vom Dividenden zum Rest herunter.

3) Hier versuche wiederum, wie oft der Divisor in den unten stehenden Ziffern enthalten sey, und setze den Quotienten rechts an den vorigen. Ist diese Zahl aber kleiner, als der Divisor, so setze im Quotienten 0 an; setze eine Stelle rechts vom Dividenden herab und wiederhole den Versuch.

4) So fahre fort, bis die letzte Ziffer rechts im Dividenden herabgesetzt ist.

Beispiele:

1) 289 | 98479 | 340, d. h. 98479 = 289. 240 + 219
867
1177
1156
219

2) 8795 | 763845 | 86, d. h. 763845 = 86. 8795 + 7475
70360
60245
52770
7475

3) 703 | 5689121 | 8092, d. h. 5689121 = 8092. 703 + 445
5624
6512
6327
1851
1406
445

4) 9009 | 72145287 | 8008
72072
73287
72072
1215

d. h. 72145287 = 9009. 8008 + 1215

114) In einigen Fällen läßt sich das Verfahren abkürzen.

1) Soll man mit 10, 100, 1000 .... dividiren, so schneide man so viel Stellen in der Zahl rechts ab, als die Zahl Nullen hat, die Zahlen links sind der Quotient, rechts der Rest. Z. B.

$$\frac{567900}{100} = 5679$$

$$\frac{52398}{1000} = 52 \text{ Rest } 398$$

2) Wenn sich der Divisor in Factoren zerlegen läßt, so kann man mit diesen nacheinander dividiren. Dadurch wird die Division mit einem mehrzifferigen Divisor in die leichtere mit einzifferigen verwandelt.

Z. B. 1) $\frac{35616}{168} = \frac{35616}{3.7.8} = 212$

8|35616
7|4452
3|636
212

2) $\frac{404208}{48} = \frac{404208}{6.8} = 8421$

6|404208
8|67368
8421

3) Hat der Divisor Nullen rechts und nur eine werthvolle Ziffer, so schneidet man zuerst rechts am Dividenden so viel Stellen ab, als er Nullen hat und dividirt die Ziffern links, wie mit einer einzifferigen Zahl. Z. B.

1) $\frac{45678600}{900} = \frac{9|456786|00}{50754}$

2) $\frac{9738456}{8000} = \frac{8|9738|456}{1217 \text{ Rest } 2456}$

Auch bei mehrzifferigem Divisor mit Nullen rechts braucht man wenigstens nicht so viel Ziffern zu schreiben, wenn man so viel Stellen rechts im Dividenden abschneidet, als der Divisor Nullen hat.

144000 | 78930 | 000 | 548 Quotient
720
693
576
1170
1152
18000 Rest

d. h. 78930000 = 548 . 144000 + 18000

27000 | 98456 | 938 | 3646
81
174
162
125
108
176
162
14938

d. h. 98456938 = 3646 . 27000 + 14938.

4) a) Soll man mit 5, 25, 125, 625 dividiren, so multiplicire man mit 2, 4, 8, 16 und schneide rechts im Product 1, 2, 3, 4 Stellen ab. Enthalten die abgeschnittenen Stellen Nullen, so sind die Zahlen links der vollständige Quotient. Enthalten sie Ziffern, so muß man deren Betrag mit der Zahl dividiren, mit welcher multiplicirt worden, um den Rest zu finden.

Z. B. 1) $\frac{6789345795}{4}$ = 1357869159|0

2) $\frac{734568}{25}$ = 29382|72

d. h. 734568 = 29382 . 25 + 18

3) $\frac{984783}{125}$ = 7878|264

d. h. 984783 = 7878 . 125 + 33

4) $\frac{73458927}{525}$ = 117534 Rest 177, denn:

16) 73458927
440753562

117534|2832

b) Umgekehrt kann man, wenn mit 5, 25, 125, 625 multiplicirt werden soll, rechts an den Multiplicanden 1, 2, 3, 4 Nullen anhängen und darauf mit 2, 4, 8, 16 dividiren.

Z. B. 1) Wie viel ist 5 . 98763?

2 | 987630

493815

2) 25 . 26834567 = 670864175

4 | 2683456700

670864175

3) 125 . 4295763 = 536970375

8 | 4295763000

536970375

4) 625 . 93476 = 58422500

4 | 934760000

4 | 233690000

58422500

Fünfter Abschnitt.

Ueber Theilung und Messung der Zahlen.

115) Ist m. n = p, so ist auch $\frac{p}{m} = n$ und umgekehrt, wie man aus (103) sieht. Dieß kann man auch so ausdrücken:

1) $\frac{m \,.\, n}{n} = m$ und 2) $\left(\frac{m}{n}\right) . n = m$

Z. B. $\frac{3 \,.\, 15}{3} = 15$ und $\left(\frac{15}{3}\right) . 3 = 15$

$\frac{15 \,.\, 6}{6} = 15$ und $\left(\frac{6}{6}\right) . 15 = 15$

Wörtlich:

1) Ein Product durch den einen Factor dividirt, gibt den andern;
eine Größe bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl erst multiplicirt und dann dividirt.

2) Ein Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, gibt den Dividenden;
eine Größe bleibt unverändert, wenn ich sie zuerst mit einer Zahl theile und darauf mit derselben wieder multiplicire.

Zusatz. Daher gibt ein Product aus mehrern Factoren durch einige derselben dividirt, das Product der übrigen als Quotient.

$$\text{Z. B. } \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 13}{5 \cdot 6} = 4 \cdot 13 \text{ oder } \frac{1560}{30} = 52$$

$$\frac{2310}{21} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 7} = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$$

116) Soll eine Zahl durch eine andere theilbar seyn, so muß diese ein Factor von ihr seyn und umgekehrt eine Zahl theilt nur dann eine andere, wenn sie ein Factor von ihr ist.

Z. B. Soll 306 durch 9 theilbar seyn, so muß irgend eine Zahl 9 mal genommen 306 geben. Es ist aber $9 \cdot 34 = 306$.

Soll 7 ein Theiler seyn von 210, so muß es eine Zahl geben, die 9 mal genommen 210 gibt. Es ist aber $7 \cdot 30 = 210$.

117) a) Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so ist sie auch durch die Theiler oder Factoren von dieser theilbar, und es ist gleichviel, ob eine Zahl auf einmal durch eine Zahl getheilt wird, oder ob man sie nach einander durch alle Factoren des Theilers theilt.

Z. B. Ist 210 durch 30 theilbar, so ist 210 auch durch 2, 3, 5 .... als Factoren oder Theiler von 30 theilbar und es ist gleichviel, ob man 210 durch 30 theilt, oder erst durch 2, den Quotienten durch 3, diesen durch 5.

$$\frac{210}{30} = 7, \quad \frac{\left(\frac{\left(\frac{210}{2}\right)}{3}\right)}{5} = \frac{\left(\frac{105}{3}\right)}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

b) Umgekehrt ist eine Zahl durch mehrere andere, nicht weiter theilbare Zahlen, so ist sie auch durch die Producte theilbar, die man aus denselben bilden kann.

Z. B. Ist 210 durch 2, 3, 5, 7 theilbar, so ist es auch theilbar durch $2.3=6$, $3.5=15$, $5.7=35$ u. s. w.

Zusatz. Hieraus folgt, daß eine Zahl auch dann ein Theiler einer andern ist, wenn ihre Factoren sämmtlich unter den Factoren derselben vorkommen.

Z. B. 36 ist ein Theiler von 180, weil $180=2.2.3.3.5$ und $36=2.2.3.3$.

118) Eine Summe oder ein Unterschied gleichartiger Größen wird dividirt, wenn man die einzelnen Größen dividirt und die Quotienten addirt oder subtrahirt.

Z. B. $\frac{15\text{ fl.}+39\text{ fl.}}{3}=\frac{15\text{ fl.}}{3}+\frac{39\text{ fl.}}{3}=5+13=18\text{ fl}$

$$\frac{27+36}{9}=\frac{27}{9}+\frac{36}{9}=3+4=7$$

$$\frac{56-48}{8}=\frac{56}{8}-\frac{48}{8}=7-6=1$$

$$\frac{72-54}{18}=\frac{72}{18}-\frac{54}{18}=4-3=1$$

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\text{ und }\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$$

dasselbe gilt auch von mehrtheiligen Ausdrücken (65).

Z. B. $\frac{a+b-c-d+e}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}-\frac{d}{m}+\frac{e}{m}$

119) Lassen sich die Summanden durch eine Zahl theilen, so ist auch die Summe theilbar durch dieselbe Zahl. Z. B.

1) Ist 25 und 75 durch 5 theilbar, so ist auch die Summe 100 durch 5 theilbar,

statt $25+75=100$ kann ich schreiben:

$$5.5+15.5=20.5.$$

2) Eben so $34+85=119$

oder $2.17+5.17=7.17.$

3) $48+80+96=224$

$$3.16+5.16+6.16=14.16.$$

Zusatz. Weil der Subtrahend und Rest zusammen den Minuend geben, so kann man diesen Satz auch so darstellen.

Lassen sich Subtrahend und Rest durch eine Zahl theilen, so ist auch der Minuend durch sie theilbar. Z. B.

Ist $7 . 17 = 2 . 17 + 5 . 17$, so ist

$7 . 17 - 2 . 17 = 5 . 17$ oder

$119 - 34 = 85$

d. h. da sich der Subtrahend 34 und der Rest 85 durch 17 theilen lassen, so ist auch 119 durch 17 theilbar.

120) Läßt sich die Summe und der eine Summand theilen, so läßt sich auch der andere theilen. Denn ist z. B.

$2 . 17 + 5 . 17 = 7 . 17$

so ist auch $7 . 17 - 2 . 17 = 5 . 17$

oder ist $5 . 29 + 7 . 29 = 12 . 29$

so ist auch $12 . 29 - 7 . 29 = 5 . 29$

Zusatz. Dieß kann man auch so ausdrücken: läßt sich Minuend und Subtrahend theilen, so ist auch der Rest theilbar.

Z. B. $45 - 15 = 30$

$64 - 48 = 16$

$65 - 26 = 39$

121) Da $3 . 18 = 18 + 18 + 18$, so ist

$$\frac{3 . 18}{9} = \frac{18}{9} + \frac{18}{9} + \frac{18}{9} = 3 . \frac{18}{9} = 3 . 2.$$

Hieraus sieht man, daß, wenn ein Product zu dividiren ist, man bloß den einen Factor zu dividiren und den Quotienten mit dem andern zu multipliciren hat.

Z. B. $\frac{231}{7} = 33$. Dafür:

$$\frac{11 . 21}{7} = 11 . \frac{21}{7} = 11 . 3 = 33$$ oder allgemein:

$$\frac{a . m}{n} = \frac{a}{n} . m$$

Zusatz 1. Es ist also gleichviel, ob ich eine Zahl mit einer andern multiplicire, und darauf mit einer dritten dividire, oder ob ich zuerst dividire und dann multiplicire.

Z. B. 1) $\frac{19 . 24}{12} = 19 . \frac{24}{12}$

d. h. $\frac{456}{12} = 38 = 19 . 2$

2) $\frac{13 . 56}{14} = 13 . \frac{56}{14}$

d. h. $\frac{728}{14} = 52 = 13 . 4.$

Zusatz 2. Man sieht zugleich, daß, wenn sich ein Factor eines Products durch eine Zahl theilen läßt, das ganze Product theilbar ist. Z. B.

$$35 . 119 = 4165$$

da nun 119 durch 17 theilbar ist, so muß auch 4165 durch 17 theilbar seyn.

122) Ist der Divisor und der Rest durch eine Zahl theilbar, so läßt sich auch der Dividend durch sie theilen, und umgekehrt, ist Dividend und Divisor theilbar, so ist auch der Rest theilbar. Beisp. 1) $\frac{86}{16} = 5$ Rest 6

$$\text{oder } 86 = 16 . 5 + 6.$$

Nun sind 16 und 6 durch 2 theilbar, also auch 86, wie sich aus (119 und 121) ergibt.

Da ferner, wenn $86 = 5 . 16 + 6$ auch $86 - 5 . 16 = 6$ ist, so ist auch (120 und 121), wenn 86 und 16 theilbar sind, 6 theilbar; hier durch 2.

$$2) \frac{287}{14} = 20 \text{ Rest } 7$$

$$\text{oder } 287 = 14 . 20 + 7$$

14 und 7 sind durch 7 theilbar, also auch 287. Da auch hier $287 - 14 . 20 = 7$, so ist, wenn 287 und 14 durch eine Zahl theilbar sind, 7 durch dieselbe theilbar. Dieß ist hier die Zahl 7.

123) Eine Zahl, die bloß von ihr selbst und 1 gemessen wird, heißt Primzahl an sich oder absolute Primzahl.

124) Aus vorstehenden Sätzen lassen sich folgende Regeln ableiten; um zu erkennen, ob und durch welche Zahlen eine vielzifferige Zahl sich theilen läßt.

1) Durch 2 läßt sich jede Zahl theilen, wenn sie eine durch 2 theilbare oder gerade Anzahl Einer hat.

Beisp. 5678 ist durch 2 theilbar, weil es $= 5670 + 8$ ist. Jedes Zehend läßt sich durch 2 theilen, es kommt also nur auf die Einer an. Lassen sich diese theilen, so sind beide Summanden, also die Zahl selbst durch 2 theilbar.

2) Durch 4 ist jede Zahl theilbar, in welcher der Betrag der zwei letzten Stellen rechts durch 4 theilbar ist:

$$567984 = 567900 + 84$$

3) Durch 8 ist sie theilbar, wenn der Betrag der 3 letzten Ziffern durch 8 theilbar ist:

$$9587216 = 9587000 + 216.$$

4) Durch 16, wenn der Betrag der vier letzten Stellen sich durch 16 theilen läßt:

$$9580000 + 7216 = 9587216.$$

5) Durch 5 ist eine Zahl theilbar, wenn die letzte Ziffer rechts 5 oder 0 ist. Z. B. 56785, 3450.

6) Um zu finden, ob sich eine Zahl durch 3 theilen läßt, addire man den Betrag der einzelnen Ziffern, ohne auf ihre Stelle zu sehen (suche die Quersumme der Ziffern); läßt sich diese durch 3 theilen, so läßt sich auch die ganze Zahl durch 3 theilen.

Beisp. Zu finden, ob sich 34521 durch 3 theilen läßt. Es ist:

$$\begin{aligned}
34521 &= 30000 = 3\,(9999+1) = 3\,.\,9999+3\\
&+\ 4000 = 4\,(999+1) = 4\,.\,999+4\\
&+\ 500 = 5\,(99+1) = 5\,.\,99+5\\
&+\ 20 = 2\,(9+1) = 2\,.\,9+2\\
&+\ 1 = \qquad\qquad\qquad\quad 1
\end{aligned}$$

$$34521 = (3\,.\,9999+3\,.\,999+5\,.\,99+2\,.\,9)+15$$

Nun läßt sich die Summe in der Klammer durch 3 theilen, es kommt also nur auf 15 an; dieß läßt sich aber durch 3 theilen; somit beide Summanden, also 34521 selbst. 15 ist aber hier die Quersumme der einzelnen Ziffern von 34521.

7) Dieselbe Regel gilt für 9: ist die Quersumme der Ziffern durch 9 theilbar, so ist die Zahl selbst durch 9 theilbar.

8) Die Theilbarkeit durch 11 findet man nach folgender Regel:

Ziehe die letzte Ziffer rechts von der nächstfolgenden links, den Rest von der darauf folgenden und so fort jeden neuen Rest von der folgenden Ziffer ab. Ist der letzte Rest der letzten Ziffer links gleich, oder kommt beim letzten Abziehen 0, so ist die Zahl durch 11 theilbar. Ist der Subtrahend größer, als der Minuend, so

borge aus der folgenden Stelle links 1, nimm aber deren Zahl darauf um 1 vermindert.

Beispiel 1) 4567893
41526
und zwar ist 415263 . 11 = 4567893

2) 493457008
4485972
also ist 493457008 = 44859728 . 11

3) 5709345
15539
5709345 ist also durch 11 nicht theilbar.

Von der Richtigkeit dieser Regel überzeugt man sich leicht durch Multiplication einer Zahl mit 11. Z. B.

415263 . 11 = 415263
415263
4567893

9) Haben Zahlen 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 16 zu Factoren, so müssen alle, für diese Factoren aufgestellten Regeln zugleich gelten, wenn sich eine andere Zahl durch sie soll theilen lassen. Z. B. Will man finden, ob sich 34002 durch 18 theilen läßt, so sehe man nach, ob sich die Quersumme der Ziffern durch 9, die Zahl der Einer durch 2 theilen läßt. Beides ist hier der Fall, also die Zahl selbst durch 18 theilbar.

125) Aufgabe. Eine Zahl in ihre einfachen Factoren (d. h. in solche, die Primzahlen sind) zu zerfällen, oder zu untersuchen, ob eine Zahl Factoren habe, oder eine Primzahl an sich ist. So weit nicht die angegebenen Regeln reichen, gibt es keine Art, die Factoren kennen zu lernen, als, daß man mit den kleinsten Primzahlen so lange nach einander die Division versucht, bis der letzte Quotient selbst eine Primzahl ist. Offenbar setzt dieß aber voraus, daß man alle Primzahlen kenne. Da aber diese selbst nur versuchsweise gefunden werden können, so hat man sie in Tafeln zusammengestellt. In Vega's logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Leipzig, 1796. Bd. II. sind alle Primzahlen, die zwischen 1 und 400031 liegen und außerdem von allen Zahlen bis 102000 die Factoren angegeben.

Beispiel: 1) 2310 = 2. 3. 5. 7. 11.

denn 2|2310
3|1155
5|385
7|77
11

2) 4857950 = 2. 5. 5. 97159

2|4857950
5|2428975
5|485795
97159

In diesem Beispiel würde man ohne Hilfe der Primzahlentafel nur durch sehr mühsame Versuche sich überzeugen, daß 97156 nicht weiter theilbar ist.

Bemerk. Da die meisten Abkürzungen beim practischen Rechnen auf der Gewandtheit im Zerfällen in Factoren beruhen, so thut der Anfänger wohl, wenigstens die Factoren der Zahlen bis 1000 sich wohl bekannt zu machen.

126) Aufgabe. Alle Theiler einer Zahl zu finden.

Auflösung. Zerfälle die Zahl in ihre einfachen Factoren und multiplicire diese in allen möglichen Verbindungen (117).

Beisp. 120 = 2. 2. 2. 3. 5.

2	2.
3	3.
6	5.
4	2. 2.
6	2. 3.
10	2. 5.
15	3. 5.
8	2. 2. 2.
12	2. 2. 3.
20	2. 2. 5.
30	2. 3. 5.
24	2. 2. 2. 3.
40	2. 2. 2. 5.
60	2. 2. 3. 5.
120	2. 2. 2. 3. 5.

210 = 2. 3. 5. 7.

2	2.
3	3.
5	5.
7	7.
6	2. 3.
10	2. 5.
14	2. 7.
15	3. 5.
21	3. 7.
35	5. 7.
30	2. 3. 5.
42	2. 3. 7.
70	2. 5. 7.
205	3. 5. 7.
210	2. 3. 5. 7.

127) Sind mehrere Zahlen durch eine andere theilbar, so heißt diese ein gemeinschaftliches Maß oder ein gemein-

schaftlicher Theiler von ihnen. Z. B. 4 ist ein gemeinschaftliches Maß oder ein gemeinschaftlicher Theiler von 12 und 16.

Haben mehrere Zahlen kein anderes gemeinschaftliches Maß, als 1, so heißen sie Primzahlen unter sich oder relative Primzahlen.

Ist eine Zahl durch mehrere andere zugleich theilbar, so heißt sie ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben. Z. B. 45 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 9, 5 und 15.

Anmerk. Bei Zahlen ohne Benennung läßt sich das Maß als Theiler und umgekehrt betrachten, nicht so bei andern Größen.

128) Das größte gemeinschaftliche Maß oder den größten gemeinschaftlichen Theiler mehrer Zahlen zu finden.

1. Auflösung. Zerlege die einzelnen Zahlen in ihre Factoren und multiplicire die gemeinschaftlichen. Das Product ist das größte gemeinschaftliche Maß (117).

Beispiel. 1.
135 = 3. 3. 3. 5.
144 = 2. 2. 2. 2. 3. 3
120 = 2. 2. 2. 3. 5
63 = 3. 3. 7.
} 3

2.
270 = 2. 3. 3. 3. 5
720 = 2. 2. 2. 2. 3. 3. 5
360 = 2. 2. 2. 3. 3. 5
960 = 2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. 5
900 = 2. 2. 3. 3. 5. 5
1500 = 2. 2. 3. 5. 5. 5
} 2. 3. 5 = 30

Im ersten Beispiel ist also bloß 3, im andern 2. 3. 5. oder 30 der größte gemeinschaftliche Theiler.

2. Auflösung. Da sich aber die Factoren der Zahlen meist nicht so leicht angeben lassen, so verfahre man auf folgende Art:

1) Dividire die größte der gegebenen Zahlen durch eine der kleineren, mit dem Rest den Divisor, mit dem neuen Rest den letzten Divisor und so fort, bis die Division aufgeht, so ist der letzte Divisor der größte gemeinschaftliche Theiler dieser beiden Zahlen.
2) Für diesen und die dritte Zahl suche auf dieselbe Weise den größten gemeinschaftlichen Theiler und fahre so fort,

so lange noch Zahlen vorhanden sind. Der letzte Divisor bei der letzten Division ist der größte gemeinschaftliche Theiler aller Zahlen.

Beispiel 1. Für 8771, 6623, 18079 den größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden.

6623	8771	1
	6623	
2148	6623	3
	6444	
179	2148	12
	179	
358		
358		
—		

Beweis. 179 ist der größte Theiler von sich selbst. Da es nun auch 2148 theilt, so ist es der größte Theiler von 179 und 2148. Nun ist in der zweiten Division 6623 Dividend, 2148 Divisor, 179 Rest; es ist also, da Divisor und Rest theilbar sind, auch 6623 theilbar, folglich in der ersten Division abermals der Rest 2148 und der Divisor 6623: folglich auch hier der Dividend 8771. Es ist also 179 ein gemeinschaftlicher Theiler von 6623 und 8771. Daß es aber der größte ist, läßt sich so einsehen. Es sey a ein größerer Theiler von 6623 und 8771, als 179, so muß durch a auch 2148 theilbar seyn (122), folglich auch aus gleichem Grunde 179, was der Annahme 179 > a widerspricht. Also ist 179 der größte Theiler von 6623 und 8771.

Soll nun eine Zahl zugleich 18079 theilen, so ist dieß nur entweder bei 179 selbst, oder bei einem Theiler von 179 denkbar. Man suche also den größten gemeinschaftlichen Theiler von 179 und 18079.

179	18079	101
	179	
179		
179		
—		

Da also 179 selbst ein Theiler ist von 18079, so ist es der größte gemeinschaftliche Theiler der 3 Zahlen.

2) Für 16095, 97643, 10933, 841 den größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden.

16095	97643	6		1073	10933	1		29	841	29
	96570				1073				58	
1073	16095	15		203	1073	5			261	
	1073				1015				261	
	5365			58	203	3			—	
	5365				174					
	—						29	58	2	
								58		
								—		

Also ist 29 der größte gemeinschaftliche Theiler der vier gegebenen Zahlen.

Beispiele zur Uebung.

1) 43134, 269087, 8981, 10647

2) 5207, 4699, 6223, 5969

Zusatz. Ist die eine Zahl selbst in der andern enthalten, so ist sie selbst der größte gemeinschaftliche Theiler beider. Z. B. 15 und 30.

129) Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

a) Sind die Zahlen Primzahlen an sich, so multiplicire man sie: das Product ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben. Z. B. Von 5, 7, 3, 2 ist 2. 3. 5. 7 oder 210 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

b) Ist dieß nicht der Fall, so hat man 3 verschiedene Auflösungsarten.

Aufl. 1. Zerfälle die Zahlen in ihre einfachen Factoren, setze die der ersten Zahl heraus, füge von den übrigen immer die Factoren hinzu, die in den vorhergehenden noch nicht vorgekommen sind und multiplicire diese, so ist das Product das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen.

Oder: setze jeden Factor so oft in das gemeinschaftliche Vielfache, als er in der Zahl vorkommt, die ihn am öftesten enthält.

Beispiele. Die Zahlen seyen 40, 42, 45, 48, 36, 28, so ist

40 = 2. 2. 2. 5	2. 2. 2. 5. 3. 7. 3. 2
42 = 2. 3. 7	oder 2. 2. 2. 2. 3. 3. 5. 7
45 = 3. 3. 5	
48 = 2. 2. 2. 2. 3	
36 = 2. 2. 3. 3	
28 = 2. 2. 7.	

Es ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache 5040. Der Beweis folgt unmittelbar aus (127).

Aufl. 2. Setze die Zahlen in eine Reihe, dividire mit einer Primzahl, die wenigstens in zweien der gegebenen Zahlen aufgeht, so oft, bis die noch übrigen Zahlen Primzahlen unter sich sind. Diese, mit jenen Divisoren multiplicirt, geben das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beispiel.

2	40,	42,	45,	48,	36,	28
2	20,	21,	45,	24,	18,	14
2	10,	21,	45,	12,	9,	7
3	5,	21,	45,	6,	9,	7
3	5,	7,	15,	2,	3,	7
7	5,	7,	5,	2,		7
5	5,		5,	2,		
				2,		

Also wie oben 2. 2. 2. 3. 3. 7. 5. 2 = 5040.

Beispiele zur Uebung.

1) Von 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72
2) Von 75, 80, 81, 84, 90, 91, 96, 99 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu finden.

Aufl. 3. Beide Auflösungen setzen voraus, daß man die Factoren der Zahlen kenne. Nach folgender Regel ist dieß nicht nöthig.

1) Suche den größten gemeinschaftlichen Theiler der zwei ersten Zahlen, und multiplicire die eine Zahl mit den Factoren der andern, die sie außer dem gemeinschaftlichen Theiler enthält; so gibt dieß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der zwei ersten Zahlen.
2) Für dieses und die 3te Zahl suche man auf gleiche Weise das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und so fort bis zur letzten Zahl.

3) Die zuletzt gefundene Zahl ist zugleich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller vorhergehenden.

Z. B. Von 16095, 97643, 10933 und 841 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu finden. Da nach (128. Beisp. 2.) für 16095 und 97643 der größte Theiler 1073 ist, so ist

$$\left.\begin{array}{l} 16095 = 1073.15 \\ 97643 = 1073.91 \end{array}\right| 1073.15.91 = 16095.91,$$

d. h. 1464645 ist das kl. g. Vf. von 16095 und 97643.

10933	1464645	133
	10933	
	37134	
	32799	
	43355	
	32799	
	10556	1
10933	10556	
377	10556	28
	754	
	3016	
	3016	
	—	

$$\text{Also ist } \left.\begin{array}{l} 10933 = 29.377 \\ 1464645 = 3885.377 \end{array}\right| 29.377.3885.$$

d. h. $1464645.29 = 42474705$.

Zwischen dieser Zahl und 841 findet man als größten Theiler 29, und zwar ist $843 = 29.29$; also ist das kl. g. Vf. derselben $29.42474705 = 1231766445$.

Hätte man die gegebenen Zahlen selbst mit einander multiplicirt, so wäre das Vielfache $1073.377.29$ mal zu groß geworden.

Als Uebungsbeispiele dienen die (128) angegebenen.

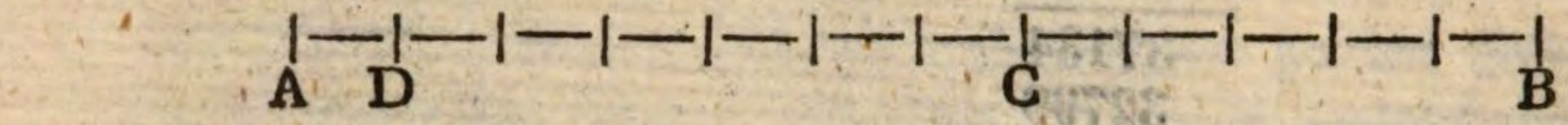
Sechster Abschnitt.

Von den Brüchen.

§. 1.

Von den gemeinen Brüchen.

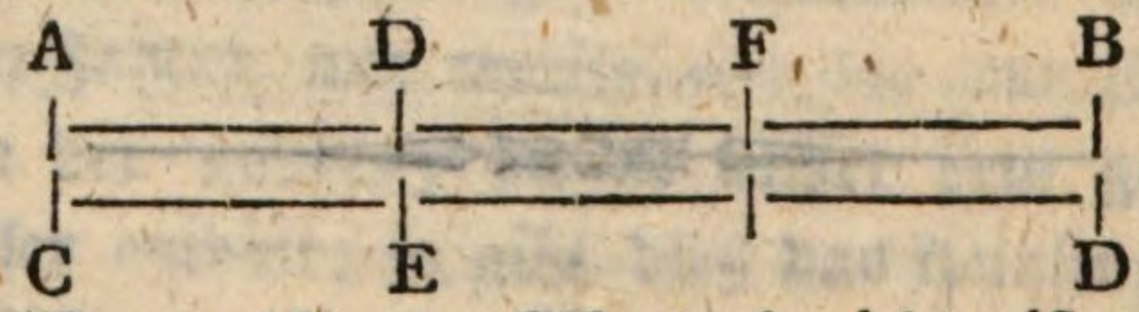
130) Nach (98) heißt jede Zahl ein Bruch, deren Einheit einer von den gleichen Theilen eines Ganzen ist. Wenn z. B. die Linie AB in 12 gleiche



Theile getheilt ist, so heißt ihr Theil AC ein Bruch der ganzen AB, nämlich 7 Zwölftel. Wie man aber Eins eine Zahl nennt, so nennt man auch AD oder ein Zwölftel selbst einen Bruch. Nach (99) bezeichnet man AD durch $\frac{AB}{12}$; also $AC = 7.\left(\frac{AB}{12}\right)$ und so bei jedem bestimmten Ganzen. Betrachtet man aber die Theile, die überhaupt ein Ganzes haben kann, so wird das Ganze gar nicht bezeichnet, sondern man schreibt $\frac{1}{12}$, d. h. 1 mal der 12te Theil (eines Ganzen); $\frac{7}{12}$ d. h. 7 mal der 12te Theil (eines Ganzen). Die Zahl 7, welche anzeigt, wie viel Einheiten der Bruch enthält, oder wie viele der gleichen Theile des Ganzen genommen sind, heißt Zähler; die Zahl 12, welche die Anzahl der Theile des Ganzen angibt, und wornach man die Theile benennt, Nenner.

Anmerk. Daß dasselbe Zeichen, wie oben bei der Division in diesem Falle gebraucht werden dürfe, läßt sich so einsehen.

1) Ein Drittel eines Ganzen ist so viel als ein Ganzes durch 3 getheilt. Ein Drittel von 2 Ganzen ist gleich 2 Dritteln von 1 Ganzen.



Z. B. Wenn AB = CD und jede ist in 3 gleiche Theile getheilt, so ist AD + CE der dritte Theil der beiden Ganzen, dieß ist aber so groß als AF oder 2 Drittel der einen Linie.

2) Ein Zwölftel eines Ganzen ist so viel als 1 Ganzes durch 12 getheilt; 7 Zwölftel eines Ganzen ist so viel, als 7 Ganze in 12 Theile getheilt:

$$\text{also ist } \frac{AB}{12} = \frac{1 \,.\, AB}{12} \text{ und } AC = \frac{7 \,.\, AB}{12}$$

3) Der 15te Theil von 11 fl. ist der 15te Theil eines Guldens 11 mal genommen, oder 11 mal der 15te Theil eines Guldens oder 11 Fünfzehntel des Guldens,

$$\text{d. h. } \frac{11 \text{ fl.}}{15} = 11 \,.\, \frac{1 \text{ fl.}}{15}$$

Oben (103) wurde schon bemerkt, daß, wenn eine Anzahl Einheiten zu theilen ist, man bloß die Zahl zu dividiren und den Quotienten auf die Einheit zu beziehen braucht, daß also

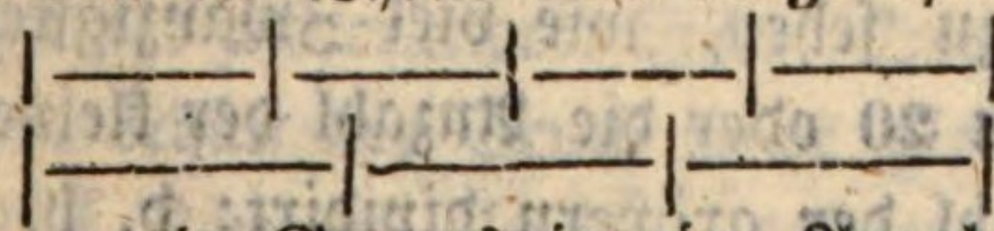
$$\text{z. B. } \frac{25 \text{ fl.}}{5} = \frac{25}{5} \text{ fl. oder } 5 \,.\, 1 \text{ fl.} = 5 \text{ fl.}$$

$$\frac{27 \text{ ℔.}}{9} = \frac{27}{9} \cdot 1 \text{ ℔.} = 3 \,.\, 1 \text{ ℔.} = 3 \text{ ℔.}$$

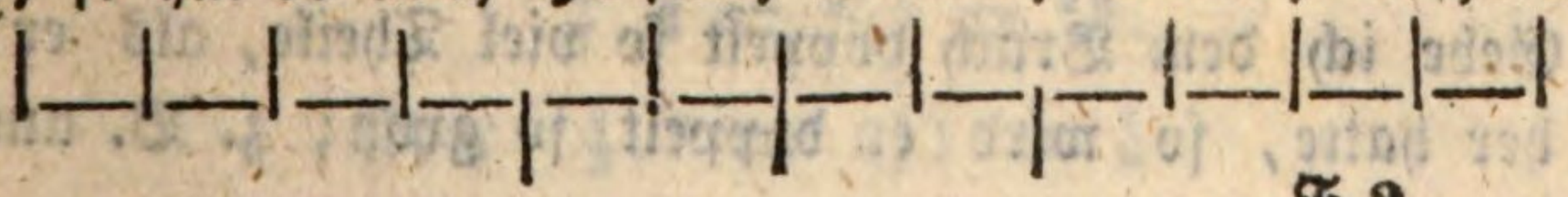
Eben so kann man hier statt $\frac{11 \text{fl.}}{15}$ oder $11 \,.\, \frac{1 \text{fl.}}{15}$ schreiben; $\frac{11}{15} \,.\, 1$ fl. oder $\frac{11}{15}$ fl. Nur muß man stets bemerken, daß $\frac{11}{15}$ nur dann einen denkbaren Werth bezeichnet, wenn man sich ein Ganzes vorstellt, das sich theilen läßt; und daß diese Zusammenstellung $\frac{11}{15}$ nichts anders sagt, als 11 mal der 15te Theil jenes Ganzen oder, was dem Betrag nach dasselbe ist, der 15te Theil von 11 solchen Ganzen.

Das Zeichen $\frac{3}{4}$ bezeichnet also immer ein gedoppeltes Verfahren an einer Größe, nämlich daß man sie mit 4 theilen, das Herausgekommene 3 mal nehmen soll, oder auch, daß man sie zuerst dreimal nehmen und dann durch 4 theilen soll.

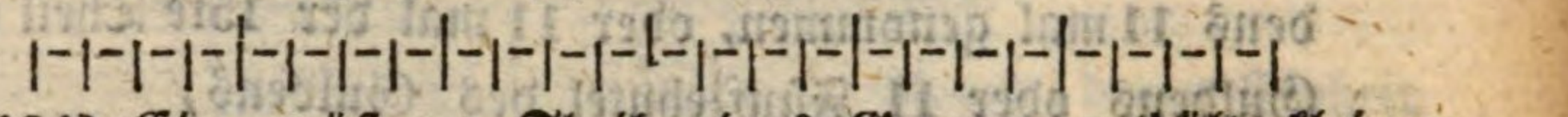
131) Je größer die Anzahl der Theile eines Ganzen ist, desto kleiner werden die Theile und umgekehrt. Z. B. $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.



132) Wenn ein Ganzes in eine Anzahl gleicher Theile getheilt ist, so hat es auch alle die Theile, deren Anzahl in der Anzahl der gegebenen Theile enthalten ist. Z. B. hat es 12tel, so hat es auch Hälften, Drittel, Viertel, Sechstel.



133) Soll ein Ganzes mehrere Theile zugleich haben, so muß es wenigstens so viele kleinere Theile haben, als das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von den Anzahlen der gegebenen Theile angibt. Z. B. Soll es 3tel, 4tel, 6tel und 8tel enthalten, so muß es 24stel haben; es kann dann aber auch in 48, 72 ... Theile getheilt seyn.



134) Ein größerer Theil eines Ganzen enthält kleinere Theile, oder läßt sich dann in kleinern Theilen ausdrücken, wenn die Anzahl der kleinern Theile durch die der größern theilbar ist. Z. B. 4tel lassen sich in 12teln ausdrücken, weil sich 12 Zwölftel oder das Ganze in 4 Abtheilungen zerlegen lassen, von welchen jede also 1 Viertel des Ganzen heißt und 3 Zwölftel enthält. $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Eben so lassen sich 8tel in 24steln ausdrücken. $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ u. s. f.

135) Sollen verschiedene Theile des Ganzen in gleichen ausgedrückt werden, so muß die Anzahl der kleinern durch die Anzahl der größern zugleich theilbar seyn, d. h. sie muß wenigstens das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von ihnen seyn. Z. B. 3tel, 4tel, 6tel, 8tel lassen sich in 24steln ausdrücken, d. h. 24 Theile lassen sich in 3 Abtheilungen sondern, auf jede gehen dann 8 24stel, es ist also $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$; sie lassen sich in 4 sondern, auf jedes 4tel gehen also 6 24stel u. s. f.

136) Will man überhaupt sehen, wie viel kleinere Theile in einem größern enthalten sind, oder auf einen größern gehen, so dividire man die Anzahl der kleinern durch die Anzahl der größern Theile; der Quotient zeigt an, wie viel kleinere Theile der größere enthält.

Z. B. Man erfährt auch, ohne das bestimmte Ganze getheilt vor sich zu sehen, wie viel Zwanzigstel auf 1 Fünftel gehen, wenn man 20 oder die Anzahl der kleinern Theile durch 5, oder die Anzahl der größern dividirt; d. h. $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$. Eben so ist $\frac{1}{7} = \frac{3}{21}$, $\frac{1}{11} = \frac{3}{33}$ u. s. f.

137) Der Betrag eines Bruches hängt vom Zähler und Nenner zugleich ab.

a) Gebe ich dem Bruch doppelt so viel Theile, als er bisher hatte, so wird er doppelt so groß; z. B. aus $\frac{5}{12}$

wird $\frac{10}{12}$, aus $\frac{3}{8}$ wird $\frac{6}{8}$, d. h. das Doppelte. Lasse ich dem Bruch nur halb so viel Theile, als er hatte, so wird er halb so groß. Z. B. $\frac{3}{4}$ ist die Hälfte von $\frac{6}{4}$, wie überhaupt 3 die Hälfte von 6 ist.

b) Läßt man aber auch die Menge der Theile im Bruch unverändert, so kann man die einzelnen Theile verdoppeln, verdreifachen. Dieß zeigt man durch Division des Nenners an. Denn indem man dem Ganzen halb so viel Theile gibt, als bisher, faßt man je zwei der bisherigen in einem zusammen, verdoppelt also sie, und, weil man dem Bruch gleichviel Theile läßt, den Bruch selbst.

Z. B. $\frac{5}{8}$ wird verdoppelt, wenn ich ihm 5 Theile lasse, aber jeden Theil verdopple. Das Doppelte des Achtels ist aber das Viertel (136): also hat der Bruch jetzt $\frac{5}{4}$. Man brauchte also nur den Nenner 8 durch 2 zu dividiren, um diese Verdopplung anzuzeigen.

Umgekehrt kann man die Theile des Bruches verkleinern, wenn man den Nenner multiplicirt, denn dadurch zeigt man an, daß das Ganze mehr Theile erhalten, als es zuvor hatte, und daß also jeder Theil kleiner ist. Behält also der Bruch gleichviel Theile, wie bisher, so ist er so vielmal verkleinert, wie viel mal man die Theile des Ganzen vermehrt hat.

Z. B. $\frac{3}{4}$ gibt, wenn man jeden Theil halbirt, also dem Ganzen 8tel gibt, im Bruch aber 3 Theile behält, $\frac{3}{8}$.

Hieraus ergeben sich folgende Regeln:

1) Ein Bruch wird mit einer Zahl multiplicirt, entweder wenn man den Zähler multiplicirt und den Nenner unverändert läßt, oder wenn man den Nenner dividirt, aber den Zähler unverändert läßt. Durch Multiplication des Zählers erhält der Bruch mehr gleich große, durch Division des Nenners gleichviel größere Theile.

Beisp. $\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{6} = \frac{15}{6}$.

Aber auch $\frac{5}{6} \cdot 3 = (\frac{5}{3}) = \frac{5}{2}$

$\frac{7}{8} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{8} = \frac{28}{8}$.

Oder $\frac{7}{8} \cdot 5 = (\frac{7}{4}) = \frac{7}{2}$.

Allgemein: $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$, $\frac{1}{b} \cdot m = \frac{m}{b}$

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{\left(\frac{b}{m}\right)}, \frac{1}{b} \cdot m = \frac{1}{\left(\frac{b}{m}\right)}$$

Zusatz. Multiplicirt man also einen Bruch mit seinem Nenner, so kommt der Zähler (102).

Z. B. $\frac{5}{6} \cdot 6 = 5$

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

$$\frac{1}{m} \cdot m = 1$$

2) Ein Bruch wird durch eine Zahl dividirt, entweder indem man den Zähler dividirt und den Nenner unverändert läßt, oder indem man den Zähler unverändert läßt und den Nenner multiplicirt. Durch Division des Zählers erhält der Bruch weniger gleich große Theile, durch Multiplication des Nenners gleichviel kleinere.

Z. B. $\frac{\left(\frac{10}{11}\right)}{5} = \frac{\left(\frac{10}{5}\right)}{11} = \frac{2}{11}$. Oder $\frac{\left(\frac{10}{11}\right)}{5} = \frac{10}{11 \cdot 5} = \frac{10}{55}$

$\frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{3} = \frac{\left(\frac{6}{3}\right)}{7} = \frac{2}{7}$. Oder $\frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{3} = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$

Allgemein: $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{m} = \frac{\left(\frac{a}{m}\right)}{b}$. Oder $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{m} = \frac{a}{b.m}$

$$\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{m} = \frac{\left(\frac{1}{m}\right)}{b} = \frac{1}{mb}$$

Anmerk. Man wendet bei der Multiplication, wie bei der Division, jedes Mal die Regel an, welche das Resultat am bequemsten und in den kleinsten Zahlen gibt.

Z. B. $\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5}{2}$, aber $\frac{5}{6} \cdot 7 = \frac{35}{6}$

$\frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{3} = \frac{2}{7}$, aber $\frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{5} = \frac{3}{35}$

Zusatz. Ist die Gleichung $\frac{a}{bm} = \frac{\frac{a}{b}}{m}$ in reinen Zahlen gegeben, so drückt sie den oben schon vorgekommenen Satz aus: Soll eine Zahl durch ein Product dividirt werden, so kann man sie mit den einzelnen Factoren nacheinander dividiren.

$$\text{Z. B. } \frac{24}{3.4} = \frac{\left(\frac{24}{3}\right)}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

3) Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$\text{Z. B. } \frac{5}{8} = \frac{10}{16}, \quad \frac{12}{14} = \frac{6}{7}, \quad \frac{a}{m} = \frac{ab}{mb} \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(\frac{b}{m}\right)}$$

Durch Multiplication des Zählers gibt man dem Bruch eben so viel mal mehr Theile, als jeder Theil durch Multiplication des Nenners verkleinert wird. Umgekehrt gibt man ihm durch Division des Zählers eben so vielmal weniger Theile, als jeder Theil durch Division des Nenners vergrößert wird.

Zusatz 1. Ist also Zähler und Nenner in Factoren ausgedrückt, so kann man die gemeinschaftlichen weglassen (115. 3.):

$$\frac{5.4.7}{2.5.3} = \frac{14}{3}, \quad \frac{abc}{am} = \frac{bc}{m}$$

$$\frac{150}{3b} = \frac{50}{b}, \quad \frac{27ab}{15bc} = \frac{9a}{5c}.$$

Zusatz 2. Darnach läßt sich auch ein Bruch in den kleinsten Zahlen ausdrücken. Man suche nämlich nach (128) den größten gemeinschaftlichen Theiler des Zählers und Nenners, und dividire beide mit diesem. Z. B.

$$\frac{456}{5928} = \frac{1.456}{13.456} = \frac{1}{13}, \quad \frac{1573}{3003} = \frac{11.143}{21.143} = \frac{11}{21}$$

Anmerkung. Man nennt dieses Verfahren das Aufheben der Brüche, und deutet es in der Rechnung dadurch an, daß man die gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner wegstreicht.

138) Vergleicht man den Bruch mit dem Ganzen, dessen Theile seine Einheiten sind, so kann er kleiner, gleich oder größer seyn, als dieses. Den Bruch, der kleiner ist, als das Ganze, nennt man wohl auch ächten, den größern unächten Bruch.

Z. B. $\frac{7}{8} < 1, \quad \frac{8}{8} = 1, \quad \frac{9}{8} > 1;$

es mag hier 1, welches Ganze man will, bezeichnen.

Hieraus erhält man folgende Regeln:

1) Man macht die Ganzen zu solchen Theilen, wie sie der Nenner eines Bruches anzeigt, wenn man ihre Anzahl mit dem Nenner multiplicirt und diesen unter das Product schreibt.

Z. B. $5\,\text{fl.} = \frac{5.7}{7}\,\text{fl.} = \frac{35}{7}\,\text{fl.}$ (130)

2) Umgekehrt macht man einen Bruch zu Ganzen, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt. Z. B.

$\frac{37}{8}\,\text{fl.} = 4\,\text{fl. und } \frac{5}{8}\,\text{fl.} = (4+\frac{5}{8})\,\text{fl.}$

Hier läßt man gewöhnlich (+) weg und schreibt:

$\frac{37}{8}\,\text{fl.} = 4\frac{5}{8}\,\text{fl.}$

Beispiele:

1) 5 Ganze sind $\frac{15}{3}, \frac{20}{4}, \frac{25}{5}, \frac{40}{8}\ldots$

2) $\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}, \frac{39}{13} = 3, \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}\ldots$

139) Gleichbenannte Brüche sind nichts anderes, als Zahlen von gleicher Einheit, und lassen sich daher, wie diese, addiren und subtrahiren, wenn man ihre Zähler addirt oder subtrahirt, und der Summe oder dem Unterschied den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

Z. B. $\frac{5}{8}+\frac{7}{8} = \frac{12}{8}, \frac{2}{3}+\frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

$\frac{8}{13}-\frac{5}{13} = \frac{3}{13}, \frac{7}{12}-\frac{5}{12} = \frac{2}{12}$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m},\quad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$$

$$\frac{a}{m}+\frac{1}{m}=\frac{a+1}{m},\quad \frac{a}{m}-\frac{1}{m}=\frac{a-1}{m}$$

Zusatz. Sind mit den gleichbenannten Brüchen Ganze verbunden, so kann man diese und die Brüche unter sich verbinden (23 und 69). Z. B.

$5\frac{2}{5}+3\frac{1}{5} = 8\frac{3}{5},\ 9\frac{2}{7}-5\frac{1}{7} = 4\frac{1}{7}$

$4\frac{5}{6}-3\frac{1}{6} = 1\frac{4}{6},\ 7\frac{4}{5}-3\frac{2}{5}-4\frac{2}{5}$

$$a+\frac{b}{m}+c+\frac{d}{m}=a+c+\frac{b+d}{m}$$

$$\left[a+\frac{b}{m}\right]-\left[c+\frac{d}{m}\right]=(a-c)+\left[\frac{b}{m}-\frac{d}{m}\right]=a-c+\frac{b-d}{m}$$

Aus der Summe der Brüche kann man hier nach (138, 2) die Ganzen herausziehen, und mit der Summe der Ganzen verbinden.

Z. B. $4\frac{1}{2}+5\frac{1}{2} = 9\frac{2}{2} = 9+1 = 10$

$7\frac{5}{6}+11\frac{5}{6} = 18\frac{10}{6} = 18+1+\frac{4}{6} = 19\frac{4}{6}$

140) So wenig man aber Zehner und Einer addiren kann, ohne die Zehner als Einer zu denken, eben so wenig läßt sich angeben, was die Summe von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ sey, ohne daß man beide in gleichen Theilen des Ganzen ausdrückt, aus welchem die 5tel und 3tel genommen sind (sie auf gleiche Benennung bringt). Heißt man dann den gemeinschaftlichen Nenner der Brüche Hauptnenner, so zeigt dieser an, wie viel Theile das Ganze haben muß, wenn es die Theile der gegebenen Brüche zugleich enthalten soll, er ist also nach (135) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der einzelnen Nenner.

Man hat also für das Gleichbenennen der Brüche folgende Regel:

Suche nach (129) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der einzelnen Nenner, dividire dieses durch jeden Nenner, so gibt der Quotient an, wie viel Theile von der Benennung des Hauptnenners auf einen Theil jedes Bruches gehen (136); diese Zahl multiplicire mit der Anzahl der Theile, die der Bruch hat, oder mit dem Zähler, so kommt die Anzahl der kleinern Theile, die dem ganzen Bruch gleich ist.

Diese Regel läßt sich auf folgende Art leicht befolgen:

$2.2.2.3.3 = 72$

1)	$\frac{5}{8}$	2.2.2	9	45	d. h.	$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$
	$\frac{7}{12}$	2.2.3	6	42		$\frac{7}{12} = \frac{42}{72}$
	$\frac{13}{24}$	2.2.2.3	3	39		$\frac{13}{24} = \frac{39}{72}$
	$\frac{19}{36}$	2.2.3.3	2	38		$\frac{19}{36} = \frac{38}{72}$

$2.2.2.3.3.5.7 = 2520$

2)	$\frac{13}{120}$	2.2.2.3.5	21	273	d. h.	$\frac{13}{120} = \frac{273}{2520}$
	$\frac{17}{210}$	2.3.5.7	12	204		$\frac{17}{210} = \frac{204}{2520}$
	$\frac{11}{360}$	2.2.2.3.3.5	7	77		$\frac{11}{360} = \frac{77}{2520}$
	$\frac{19}{180}$	2.2.3.3.5	14	266		$\frac{19}{180} = \frac{266}{2520}$

Die erste Zahlreihe links enthält die Brüche, welche gleich zu benennen sind; die zweite die Factoren der Nenner, deren gemeinschaftliches Vielfaches (129) oben angeschrieben ist; die dritte Zahlreihe den Betrag jedes einzelnen Bruchtheils in Theilen, wie sie der Hauptnenner anzeigt (oder das, was man erhält, wenn man den Hauptnenner durch die einzelnen Nenner dividirt); die vierte Zahlreihe den ganzen Betrag jedes Bruches, ausgedrückt in solchen Theilen.

Hat man den Hauptnenner auf andere Art gefunden, so bleibt die 2te Zahlreihe weg. Z. B.

336

$\frac{7}{12}$	28	196	d. h.	$\frac{7}{12} = \frac{196}{336}$
$\frac{19}{84}$	4	76		$\frac{19}{84} = \frac{76}{336}$
$\frac{15}{16}$	21	315		$\frac{15}{16} = \frac{315}{336}$

Indessen ist das Aufsuchen des gemeinschaftlichen Vielfachen durch Zerlegung in Factoren zu empfehlen, da alsdann die Division des Hauptnenners durch jeden einzelnen Nenner sehr erleichtert ist; nach (115. Z.).

Zusatz. Es versteht sich übrigens, daß man für die Ausübung bei wenigen Brüchen mit kleinen Nennern, wo sich die Rechnung ganz oder zum Theil leicht im Kopf vornehmen läßt, diesen Ansatz nicht macht. So sieht man z. B. sogleich, daß $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}$ in 24teln sich ausdrücken lassen und $\frac{16}{24}, \frac{9}{24}, \frac{10}{24}$ geben.

Allgemeine Darstellung.

1) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{bd}, \frac{f}{gd}, \frac{h}{mb}$ gleich zu benennen.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner, oder der Hauptnenner, wird (129): b.d.g.m.

Dieses dividirt durch den Nenner b gibt dgm als die Anzahl der Theile des Ganzen, die auf $\frac{1}{b}$ gehen. Multiplicirt mit dem Zähler a, so erhält man daraus a d g m als Zähler des Bruches, der $\frac{a}{b}$ gleich ist und den Hauptnenner hat. Es ist also:

$$\frac{a}{b} = \frac{adgm}{bdgm}, \quad \frac{c}{d} = \frac{cbgm}{bdgm}, \quad \frac{e}{bd} = \frac{egm}{bdgm}, \quad \frac{f}{gd} = \frac{fbm}{bdgm},$$

$$\frac{h}{mb} = \frac{hgd}{bdgm}$$

Die Veränderung jedes einzelnen Bruches könnte man auch aus (137, 3) so ableiten. Setzt man im Bruch $\frac{a}{b}$ für den Nenner b den Hauptnenner bdgm, so wird derselbe durch dgm multiplicirt, man muß also auch den Zähler a mit dgm multipliciren, wodurch man also erhält: $\frac{a}{b} = \frac{adgm}{bdgm}$

2) $\frac{5}{ab}, \frac{7}{12a}, \frac{3}{24b}, \frac{1}{30bc}, \frac{9}{40ad}$ gleich zu benennen.

Als Hauptnenner erhält man a . b . 2 . 2 . 3 . 2 . 5 . c . d oder 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . a . b . c . d = 120 ab cd. Folglich für die einzelnen Brüche nach der Reihe.

$$\frac{600\,cd}{120\,abcd}, \quad \frac{70\,cd}{120\,abcd}, \quad \frac{15\,acd}{120\,abcd}, \quad \frac{4\,ad}{120\,abcd}, \quad \frac{27\,bc}{120\,abcd}$$

3) $\frac{1}{a}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{21}, \frac{1}{b}$ geben:

$$\frac{21\,b}{21\,ab}, \quad \frac{7\,ab}{21\,ab}, \quad \frac{3\,ab}{21\,ab}, \quad \frac{ab}{21\,ab}, \quad \frac{21\,a}{21\,ab}$$

141) Ungleichbenannte Brüche werden addirt, oder einer vom andern subtrahirt, wenn man sie nach (140) gleich benennt, und dann (139) die Zähler addirt oder subtrahirt.

a) Addition. Beispiele.

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{17}{20}+\frac{9}{10}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}+\frac{34}{40}+\frac{36}{40}=\frac{16+15+34+36}{40}$

$$=\frac{101}{40}=\text{(nach 138)}\ 2\frac{21}{40}$$

2) $\frac{5}{17}+\frac{13}{34}+\frac{7}{51}=\frac{30}{102}+\frac{39}{102}+\frac{14}{102}=\frac{30+39+14}{102}=\frac{83}{102}$

3) $\frac{6}{11}+\frac{11}{12}+\frac{7}{22}+\frac{8}{33}=\frac{72}{132}+\frac{121}{132}+\frac{42}{132}+\frac{32}{132}=\frac{267}{132}=2\frac{3}{132}$

4) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

5) $\frac{a}{3b}+\frac{c}{6b}=\frac{2a}{6b}+\frac{c}{6b}=\frac{2a+c}{6b}$

6) $\frac{1}{ab}+\frac{2}{3a}=\frac{3+2b}{3ab}$

7) $\frac{1}{2}+\frac{a}{b}+\frac{c}{10b}=\frac{5b+10a+c}{10b}$

8) $\frac{5}{12}+\frac{7}{6a}+\frac{13}{9b}=\frac{15ab}{36ab}+\frac{42b}{36ab}+\frac{52a}{36ab}=\frac{15ab+42b+52a}{36ab}$

Zusatz 1. Die (140) angegebene Zusammenstellung für das Gleichbenennen läßt sich zugleich für die Addition der Brüche benützen. Z. B.

$2.2.2.3.5 = 120$

$\frac{5}{8}$	2.2.2	15	75
$\frac{19}{120}$	2.2.5	6	114
$\frac{17}{24}$	2.2.2.3	5	85
$\frac{13}{40}$	9.2.2.5	3	39
			313 d. h.

$\frac{5}{8} + \frac{19}{120} + \frac{17}{24} + \frac{13}{40} = \frac{313}{120} = 2\frac{75}{120}$

Zusatz 2. Auch Ganze lassen sich (138) mit Brüchen gleich benennen, somit auch addiren. Z. B.

$4\frac{3}{4} = \frac{16}{4} + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$

$5\frac{7}{11} = \frac{55}{11} + \frac{7}{11} = \frac{62}{11}$

$$a + \frac{b}{m} = \frac{am}{m} + \frac{b}{m} = \frac{am+b}{m}$$

$$1 + \frac{b}{m} = \frac{m}{m} + \frac{b}{m} = \frac{m+b}{m}$$

Zusatz 3. Hat man Ausdrücke, die aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, (sogenannte gemischte Zahlen) zu addiren, so addire man zuerst die Brüche, verwandle sie in Ganze (138) und nehme diese zur Summe der Ganzen. Z. B.

$2\frac{3}{4} + 2\frac{2}{5} + 3\frac{5}{8} = 4\frac{30}{40} + 2\frac{16}{40} + 3\frac{25}{40} = 9\frac{71}{40} = 10\frac{31}{40}$

$3\frac{2}{3} + 1\frac{4}{5} + 1\frac{1}{2} = 3\frac{20}{30} + 1\frac{24}{30} + 1\frac{15}{30} = 5\frac{59}{30} = 6\frac{29}{30}$

$$a + \frac{b}{c} + d + \frac{e}{f} = a + d + \frac{bf+ec}{cf}$$

Oder mit Benützung der Zusammenstellung in (140)

$2.2.3.3.5 = 180$

$4\frac{5}{18}$	2.3.3	10	50
$3\frac{7}{12}$	2.2.3	15	105
$9\frac{14}{15}$	3.5	12	168
$10\frac{17}{30}$	2.2.5	9	153
26			476

d. h. $\frac{476}{180} = 2\frac{116}{180} = 2\frac{29}{45}$

folglich die Summe $26 + 2\frac{29}{45} = 28\frac{29}{45}$

Zur Uebung:

$$a + \frac{b}{cd} + \frac{1}{cn} + \frac{2}{dn} = ?$$

$$3a + \frac{3}{sa} + \frac{5}{7m} + \frac{6}{9n} = ?$$

$$s + \frac{m}{a} + \frac{1}{a} = ?$$

$$27 + \frac{3}{5b} + \frac{6}{9c} + \frac{7}{15c} = ?$$

$$201 + \frac{5}{36c} + \frac{7}{15cd} = ?$$

b) Subtraction. Beispiele:

$\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21}{24} - \frac{16}{24} = \frac{5}{24}$, $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$

$\frac{5}{8} - \frac{3}{5} = \frac{25}{40} - \frac{24}{40} = \frac{1}{40}$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a}{2b} - \frac{1}{6n} = \frac{3na - b}{6bn}, \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{2n} = \frac{2n - b}{2bn}$$

Zusatz 1. Sind Brüche von Ganzen abzuziehen, so verwandle man erst alle Ganzen in die Theile des Bruches (nach 138), und ziehe von dieser Zahl den Zähler ab. Z. B.

$$4 - \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{32 - 3}{8} = \frac{29}{8}$$

$$2 - \frac{1}{4} = \frac{8 - 1}{4} = \frac{7}{4}, \quad 6 - \frac{5}{6} = \frac{36 - 5}{6} = \frac{31}{6}$$

$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$$

$$1 - \frac{m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n} = \frac{n - m}{n}$$

Gewöhnlich will man den Unterschied nicht in Bruchtheilen, sondern in einer gemischten Zahl; dann mache man nur so viel Ganze zu Bruchtheilen, als nöthig ist, um den Bruch abziehen zu können.

$4 - \frac{3}{8} = 3\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 3\frac{5}{8}$

$2 - \frac{1}{4} = 1\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

$17 - \frac{5}{8} = 16\frac{3}{8}$, $19 - \frac{3}{11} = 18\frac{8}{11}$

$$a - \frac{m}{n} = (a-1) + 1 - \frac{m}{n} \text{ (nach 56)} = a - 1 + \frac{n}{n} - \frac{m}{n} = a - 1 + \frac{n - m}{n}$$

$$a - \frac{1}{n} = a - 1 + \frac{a - 1}{n}, \quad a - \frac{3}{2n} = a - 1 + \frac{2n - 3}{2n}$$

Zusatz. 2. Sind Ganze mit den Brüchen verbunden, so ziehe man diese von den Ganzen, den Bruch vom Bruch ab (69). Z. B.

$3\frac{5}{6} - 1\frac{1}{6} = 2\frac{4}{6} = 2\frac{2}{3}$
$5\frac{3}{8} - 4\frac{1}{4} = 5\frac{3}{8} - 4\frac{2}{8} = 1\frac{1}{8}$
$5\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5} = 5\frac{15}{20} - 3\frac{8}{20} = 2\frac{7}{20}$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)-\left(d+\frac{e}{f}\right)=(a-d)+\left(\frac{b}{c}-\frac{e}{f}\right)=a-d+\frac{bf-ce}{cf}$$

$$\left(a+\frac{1}{c}\right)-\left(+\frac{1}{f}\right)=a-d+\frac{f-c}{cf}$$

Zusatz. 3. Ist der Bruch des Subtrahenden größer, als der des Minuenden, oder hat der Minuend gar keinen Bruch bei den Ganzen, so nehme man von den Ganzen des Minuenden 1 zu den Theilen des Bruches und ziehe dann ab. Z. B.

$5\frac{1}{3} - 3\frac{4}{7} = 4\frac{4}{3} - 3\frac{4}{7} = 4\frac{28}{21} - 3\frac{12}{21} = 1\frac{16}{21}$
$9\frac{3}{8} - 8\frac{3}{4} = 8\frac{11}{8} - 8\frac{6}{8} = \frac{5}{8}$
$17\frac{2}{5} - 6\frac{5}{12} = 16\frac{7}{5} - 6\frac{5}{12} = 16\frac{84}{60} - 6\frac{25}{60} = 10\frac{59}{60}$
$5 - 3\frac{3}{8} = 4\frac{8}{8} - 3\frac{3}{8} = 1\frac{5}{8}$

142) Sind mehrere Brüche oder gemischte Zahlen nacheinander durch Addition und Subtraction zu verbinden, so ziehe man von der Summe der additiven die Summe der subtractiven ab (65), wobei dann die Regeln (141) in Anwendung kommen. Z. B.

1) $4\frac{3}{8} + 1\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} + 6\frac{1}{4} = (4\frac{3}{8} + 1\frac{1}{3} + 6\frac{1}{4}) - (2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4}) =$
$(4\frac{9}{24} + 1\frac{8}{24} + 6\frac{6}{24}) - (2\frac{16}{24} + 1\frac{6}{24}) = 11\frac{23}{24} - 3\frac{22}{24} = 8\frac{1}{24}$

2) $5\frac{3}{8} - 1\frac{1}{10} + 2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5} = (5\frac{3}{8} + 2\frac{1}{4}) - 1\frac{1}{10} + 1\frac{1}{5}) = 7\frac{5}{8} - 2\frac{3}{10}$
$= 7\frac{25}{40} - 2\frac{12}{40} = 5\frac{13}{40}$

3) $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4} - 2\frac{2}{7} - 3\frac{5}{14} = (3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}) - (2\frac{2}{7} + 3\frac{5}{14}) =$
$7\frac{11}{12} - 5\frac{9}{14} = 7\frac{77}{84} - 5\frac{54}{84} = 2\frac{23}{84}$

4) $6\frac{2}{3} - (1\frac{1}{4} + 2\frac{2}{5}) - [(3\frac{1}{12} - 1\frac{1}{5}) - 2\frac{1}{3}] = 6\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} - 2\frac{2}{5} - 3\frac{1}{12}$
$+ 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{3}$ nach (67) $= (6\frac{2}{3} + 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{3}) - (1\frac{1}{4} + 2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{12}$
nach (65) $= 10\frac{1}{5} - 6\frac{11}{15} = \frac{7}{15}$

Allgemeine Ausdrücke:

5) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{mc} - \frac{d}{mnc} + \frac{e}{bn} - \frac{f}{bm} = \frac{amn}{bcmn} + \frac{bbn}{bcmn} - \frac{bd}{bcmn}$
$+ \frac{cem}{bcmn} - \frac{cfn}{bcmn} = \frac{amn + bbn - bd + cem - cfn}{bcmn}$

6) $\frac{3a}{5m} + \frac{5b}{7mn} - \frac{8e}{14mc} + \frac{9d}{10nc} = \frac{42anc + 50bc - 40en + 63md}{70mnc}$

7) $\frac{a}{b} - \left(b - \left(\frac{d}{cm} - \frac{1}{cn}\right) - \frac{f}{gn}\right) = \frac{a}{b} - b + \frac{d}{cm} - \frac{1}{cn} + \frac{f}{gn}$
nach 67 $= \frac{amncg - bbgmn + bdncg - bgm + bcfm}{bcgmn}$

Zusatz. Bei größern Nennern kann man sich auch in solchen zusammengesetzten Ausdrücken das Gleichbenennen und Verbinden der Brüche durch die (141) gelehrte Zusammenstellung erleichtern.

Beispiel: $13\frac{5}{21} + 14\frac{13}{36} - 11\frac{17}{60} + 14\frac{13}{90} - 18\frac{17}{120} - 4\frac{7}{15} = ?$

$2.2.2.3.3.3.5 = 1080$

+ $13\frac{5}{21}$	3.3.3	40	200
+ $14\frac{13}{36}$	2.2.3.3	30	390
− $11\frac{17}{60}$	2.2.3.5	18	306
+ $14\frac{13}{90}$	2.3.3.5	12	156
− $18\frac{17}{120}$	2.2.2.3.5	9	153
− $4\frac{1}{15}$	3.5	72	72
		$41 - 33 = 8$	$746 - 531 = 215$

d. h. der Betrag ist $8\frac{215}{1080} = 8\frac{43}{216}$.

Zur Uebung:

1) $\frac{5}{8} + \frac{2}{9} + \frac{7}{10} + \frac{3}{11} - \frac{1}{12} - \frac{4}{15} + \frac{9}{16} + \frac{17}{20} + \frac{12}{13} - \frac{9}{35} = ?$

Hauptnenner ist: 1275120.

2) $3972\frac{17}{96} - 547\frac{71}{84} - 319\frac{11}{12} - 45\frac{17}{24} = ?$

3) $5\frac{6}{11} + 3\frac{1}{5} - 7\frac{2}{4} - 8\frac{1}{2} + 13\frac{1}{9} + 11\frac{1}{15} - 1\frac{1}{18} + 7\frac{1}{11} - 8\frac{5}{12} = ?$

143) Beispiele über die Regeln in (141 und 142) in Verbindung mit den frühern Sätzen.

1) In bestimmten Zahlen.

1) $5\frac{3}{4}.7 = 5.7 + \frac{3}{4}.7$ (nach 78) $= 35 + \frac{21}{4}$ (nach 137)
$= 35 + 5\frac{1}{4}$ (nach 138, 2) $= 40\frac{1}{4}$ nach (141 a, 3)

2) $7\frac{1}{8}.4 = 28\frac{1}{2}$

3) $3\frac{4}{5}.9 = 27\frac{36}{5} = 34\frac{1}{5}$

4) $(3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}).6 = 24\frac{30}{6} = 29$

5) $(9\frac{3}{8} - 5\frac{1}{2}).7 = 3\frac{7}{8}.7 = 21\frac{49}{8} = 27\frac{1}{8}$

6) $\frac{5\frac{1}{3}}{4} = \frac{(\frac{16}{3})}{4}$ (nach 138, 1) $= \frac{4}{3}$ (nach 137, 2)

7) $\frac{6\frac{1}{2}}{4} = \frac{(\frac{13}{2})}{4} = \frac{13}{8}$

8) $\frac{5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}}{7} = \frac{6\frac{5}{6}}{8}$ (nach 141 a, 3.) $= \frac{41}{6}{7}$ (nach 138, 1)
$= \frac{41}{42}$ (nach 137, 2)

9) $\frac{7\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}}{9} = \frac{5\frac{11}{12}}{9}$ (nach 141, b) $= \frac{\frac{71}{12}}{9}$ (nach 138, 1)

$= \frac{71}{108}$ (nach 137, 2)

10) $\frac{1\frac{1}{3}}{4} + \frac{2\frac{3}{5}}{6} = \frac{\frac{4}{3}}{4} + \frac{\frac{13}{5}}{6}$ (nach 138, 2) $= \frac{1}{3} + \frac{13}{30}$ (nach 137, 2)

$= \frac{10+13}{30}$ (nach 141 a) $= \frac{23}{30}$

11) $\frac{5\frac{1}{2}}{3} - \frac{1\frac{1}{4}}{5} = \frac{\frac{11}{2}}{3} - \frac{\frac{5}{4}}{5} = \frac{11}{6} - \frac{1}{4} = \frac{22-3}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$

12) $(3\frac{1}{4}.-1\frac{1}{4}).3-(1\frac{1}{5}+1\frac{2}{3}).2 = 2.3-2\frac{13}{15}.2 = 2(3-2\frac{13}{15})$

nach (84) $= 2 . \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$

13) $\frac{1\frac{1}{3}.4}{5} + \frac{2\frac{1}{2}.7}{3} = \frac{\frac{16}{3}}{5} + \frac{\frac{35}{2}}{3} = \frac{16}{15} + \frac{35}{6} = 1\frac{1}{15} + 5\frac{5}{6}$

$= 6\frac{21}{30} = 6\frac{7}{10}$

14) $\frac{5.6+7.6}{6} = \frac{12.6}{6} = 12$

15) $3\frac{1}{2}.5 - 3\frac{1}{2}.2 = 3\frac{1}{2}.3 = 10\frac{1}{2}$

Allgemeine Beispiele.

1) $\frac{a}{m+n} + \frac{b}{p} = \frac{ap+b(m+n)}{(m+n)p}$ (141, a)

2) $\frac{a}{m+n} + \frac{1}{p+q} = \frac{a(p+q)+m+n}{(m+n)(p+q)}$ (141, a und 73, 1)

3) $\frac{a}{m+n} + \frac{b}{m-n} = \frac{a(m-n)+b(m+n)}{(m+n)\ (m-n)}$ (nach 141, a) $=$

$\frac{a(m-n)+b(m+n)}{mm-nn}$ nach (81)

4) $\frac{a}{m+n} + \frac{a}{m-n} = \frac{a(m-n)+a(m+n)}{(m+n)(m-n)} = \frac{am-an+am+an}{mm-nn}$

nach (78 bis 81) $= \frac{2am}{mm-nn}$ nach (84)

5) $\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n} = \frac{m-n+m+n}{mm-nn} = \frac{2m}{mm-nn}$

6) $\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} = \frac{m+1-(m-1)}{mm-1} = \frac{2}{mm-1}$

7) $\frac{a}{m+1} + \frac{b}{2(m+1)} = \frac{2a+b}{2(m+1)}$

8) $\frac{a}{m-1} + \frac{b}{2m-2} + \frac{c}{3m-3} = \frac{a}{m-1} + \frac{b}{2(m-1)} + \frac{c}{3(m-1)}$

nach (84) $= \frac{6a+3b+2c}{6(m-1)}$

9) $\frac{a}{b} + m \cdot \frac{c}{d} + n \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \frac{mc}{d} + \frac{ne}{f} = \frac{adf + mbcf + nebd}{bdf}$

(nach 141).

10) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot n = \frac{ad - bc}{bd} \cdot n$ (nach 141) $= \frac{n(ad - bc)}{bd}$ (nach 137, 1)

$= \frac{adn - bcn}{bd}$ (nach 78).

11) $\frac{an + bn + cn}{n} = \frac{(a + b + c)\,n}{n}$ (nach 84) $= a + b + c$

(nach 137, 3).

12) $\frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{m}}{p} = \frac{\frac{amn + bm + cn}{mn}}{p}$ (nach 141) $= \frac{amn + bm + cn}{mnp}$

(nach 137, 2).

13) $\frac{1 + \frac{a}{m}}{n} = \frac{\frac{m + a}{m}}{n} = \frac{m + a}{mn}$

14) $\frac{a - \frac{b}{c}}{n} = \frac{\frac{ac - b}{c}}{n} = \frac{ac - b}{nc}$

144) Eine Größe wird ein viertelmal genommen, wenn ich sie in 4 Theile theile; ein viertelmal nehmen, heißt so viel, als den vierten Theil nehmen.

Eine Größe $\frac{3}{4}$ mal nehmen, heißt also nichts Anderes, als die Größe in 4 Theile theilen und einen solchen Theil 3 mal nehmen, oder die Größe 3 mal nehmen und darauf in 4 Theile theilen.

Z. B. $\frac{3}{4}$ mal eine Linie ist $\frac{1}{4}$ dieser Linie 3 mal genommen, oder von 3 solchen Linien der 4te Theil genommen (130).

$\frac{3}{4}$ von 5 fl. ist $\frac{1}{4}$ von 5 fl. 3 mal genommen $= \frac{15}{4}$ fl.

oder es ist $\frac{1}{4}$ von 3 . 5 fl. oder $\frac{15 \text{ fl.}}{4} = 3\frac{3}{4}$ fl.

$\frac{5}{8}$ von 7 ℔. ist $\frac{1}{8}$ von 7 ℔. 5 mal genommen,

oder von 5 . 7 ℔. der achte Theil $= \frac{35 \text{ ℔.}}{8} = 4\frac{3}{8}$ ℔.

Man hat also die Regel: Soll man eine Größe mit einem Bruche multipliziren, so multiplizire man mit dem Zähler und dividire das Product mit dem Nenner.

Beispiele. $\frac{5}{8} \cdot 9 = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$

$\frac{7}{8} \cdot 11 = \frac{77}{8} = 9\frac{5}{8}$

$\frac{7}{15} \cdot 12 = \frac{84}{15} = 5\frac{9}{15} = 5\frac{3}{4}$

$$\frac{7}{13} \cdot 9 = \frac{63}{13} = 4\frac{11}{13}$$

$$\frac{m}{n} \cdot b = \frac{m \cdot b}{n} = m \cdot \frac{b}{n}$$

Dieß ist aber dieselbe Regel, welche (137, 1) für die Multiplication eines Bruches mit einer Zahl aufgestellt worden ist. Man kann dieß auch so einsehen:

5 mal $\frac{3}{4}$ fl. ist so viel, als $\frac{3}{4}$ mal 5 fl. Denn
5 mal $\frac{3}{4}$ fl. ist $\frac{15}{4}$ fl. und $\frac{3}{4}$ mal 5 fl. ist $\frac{1}{4}$ von 5 fl.
oder $\frac{5}{4}$ fl. 3 mal genommen, d. h. $\frac{15}{4}$ fl.

145) Man kann also auch dann die Factoren verwechseln, wenn der eine Factor ein Bruch ist, nur muß man die Benennung auf das Product beziehen (77). Wie man sich die Zusammenstellung denkt, ist für die Rechnung dasselbe; man hat immer: $a \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \cdot a = \frac{ma}{n}$, wobei die Benennung von a oder von $\frac{m}{n}$ auf $\frac{ma}{n}$ bezogen wird.

Zusatz 1. Zur Abkürzung der Rechnung kann man zuerst die Zahl, welche mit dem Zähler multiplicirt wird, als Factor zum Zähler setzen und die gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner durch Division wegschaffen (137, 3).

$$\text{Z. B. } 45 \cdot \frac{7}{25} = \frac{45 \cdot 7}{25} \text{ (mit 5 dividirt)} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$$

$$27 \cdot \frac{11}{36} = \frac{27 \cdot 11}{36} \text{ (mit 9 div.)} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$$

$$420 \cdot \frac{31}{105} = \frac{420 \cdot 31}{105} \text{ (mit 105 div.)} = 4 \cdot 31 = 124$$

$$a \cdot m \cdot \frac{n}{ab} = \frac{amn}{ab} = \frac{mn}{b}$$

$$(m+n) \cdot \frac{p}{am+an} = \frac{(m+n)p}{a(m+n)} \text{ (nach 84)} = \frac{p}{a}$$

$$m \cdot \frac{p}{am+a} + \frac{p}{am+a} = \frac{mp+p}{am+a} = \frac{p(m+1)}{a(m+1)} = \frac{p}{a}$$

(nach 84 und 137, 3).

Zusatz 2. Hat man bloß reine Zahlen in der Gleichung $\frac{am}{b} = \frac{a}{b} m$, so kann man sie auch so ausdrücken: Ein Product wird dividirt, wenn man einen Factor desselben dividirt und den Quotienten mit dem andern multiplicirt. Z. B.

$$\frac{12 \cdot 5}{6} = \frac{12}{6} \cdot 5; \text{ denn } \frac{60}{6} = 2 \cdot 5 = 10$$

146) Soll man einen Bruch mit einem andern multipliciren, z. B. $\frac{5}{8}$ ℔. $\frac{3}{7}$ mal nehmen, so heißt dieß nichts Anderes, als $\frac{5}{8}$ ℔. in 7 Theile theilen und einen solchen Theil 3 mal nehmen. Der 7te Theil von $\frac{5}{8}$ ℔. ist aber $\frac{5}{56}$ ℔. (137, 2); dieß 3 mal genommen ist $\frac{15}{56}$ ℔. (137, 1). Aber diese Zahlen $\frac{15}{56}$ erhält man leicht aus $\frac{3.5}{7.8}$, wo 3 und 5 die beiden Zähler, 7 und 8 die beiden Nenner der gegebenen Brüche sind. Man hat also die Regel:

Soll ein Bruch mit einem andern multiplicirt werden, so multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner und dividire das erste Product durch's letzte; dem ganzen Bruch gibt man dann die Benennung des Multiplicanden. Z. B.

1) $\frac{3}{7}$ mal $\frac{5}{8}$ ℔., oder $\frac{3}{7} . \frac{5}{8}$ ℔. $= \frac{3.5}{7.8}$ ℔. $= \frac{15}{56}$ ℔.

2) $\frac{4}{5}$ mal $\frac{2}{3}$ fl., oder $\frac{4}{5} . \frac{2}{3}$ fl. $= \frac{4.2}{5.3}$ fl. $= \frac{8}{15}$ fl.

3) $\frac{3}{11} . \frac{6}{7} = \frac{18}{7}$

4) $\frac{4}{5} . \frac{1}{5}$ fl. $= \frac{4}{25}$ fl.

5) $\frac{1}{4} . \frac{9}{11}$ fl. $= \frac{9}{44}$ fl.

6) $\frac{1}{5} . \frac{1}{6}$ fl. $= \frac{1}{30}$ fl.

7) $\frac{a}{b} . \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$

8) $\frac{a}{b} . \frac{1}{n} = \frac{a}{bn}$

9) $\frac{1}{a} . \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

Zusatz. Auch hier ist die Ordnung der Factoren willkührlich, wenn man die Benennung auf das Product bezieht (77). Z. B.:

$$\frac{5}{6} . \frac{5}{7} \text{ fl.} = \frac{5}{7} . \frac{5}{6} \text{ fl.} = \frac{25}{42} \text{ fl.}$$

147) Haben die Zähler der Brüche, die zu multipliciren sind, Factoren mit den Nennern gemein, so dividire man vorher mit diesen den Zähler und Nenner (gewöhnlich durch Wegstreichen), damit das Product in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sei (137, 3). Z. B.:

$$\frac{5}{8} . \frac{7}{15} = \frac{7}{24} \quad \frac{3}{16} . \frac{8}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{15}{19} . \frac{38}{25} = \frac{3.2}{5} = \frac{6}{5}$$

148) Es lassen sich auch Producte mehrer Brüche denken. Z. B. Habe ich $\frac{3}{5}$ mal $\frac{7}{8}$ ℔. gefunden, so kann ich davon abermal $\frac{2}{11}$ nehmen. Dann hätte ich: $\frac{21}{40} \cdot \frac{2}{11} = \frac{42}{440} = \frac{21}{220}$. Dieß konnte man auch so erhalten:

1) $\frac{2}{11} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8}$ (durch 2 gehoben) $= \frac{21}{220}$

2) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{15}$ (durch 3 u. 7 gehoben) $= \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{8}{25}$

3) $\frac{12}{25} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{8}$ (durch 4, 5 u. 3 geh.) $= \frac{7}{5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7}{30}$

Allgemein: $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{d}{m} = \frac{bcd}{nmm}$

Zusatz. Für reine Zahlen gibt dieß den Satz: Hat man ein Product durch ein anderes zu dividiren, so kann man die einzelnen Factoren des Dividenden durch die einzelnen Factoren des Divisors dividiren und diese Quotienten multipliciren (145. Zus. 2.)

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{m \cdot n \cdot p} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p}$$

$\frac{12 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{12}{4} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{9}{3}$. Denn

$\frac{1080}{60} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

149) Wendet man die bisherigen Regeln zugleich an, so lassen sich folgende Veränderungen der Ausdrücke verstehen.

1) $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}$ (nach 141, a) $= \frac{15}{4}$ (nach 146)

2) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$ (nach 147)

3) $5\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7} = \frac{21}{4} \cdot \frac{8}{7} = 6$ (nach 141 und 146)

4) $3\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{23}{7} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{46}{7}$ (nach 148) $= 6\frac{4}{7}$

5) $(\frac{3}{4} + \frac{1}{2})\ (\frac{2}{5} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{4} \cdot \frac{11}{15}$ (nach 141, a) $= \frac{11}{12}$ (nach 147)

6) $(1\frac{1}{2} - \frac{2}{3})\ (4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{30}$ (nach 141, b) $= \frac{31}{36}$

7) $\frac{(4\frac{1}{4} - 3\frac{5}{8})\ (1\frac{1}{5} + \frac{2}{3})}{9} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{28}{15}}{9}$ (nach 141, b) $= \frac{7}{54}$ (nach 148) $= \frac{7}{5\frac{4}{4}}$ (nach 137, 2)

8) $4\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{13}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{16}{5} \cdot \frac{4}{3}$ (nach 141, a) $= \frac{65}{6} + \frac{64}{15}$ (nach 146) $= 10\frac{5}{6} + 4\frac{4}{15}$ (nach 138) $= 10\frac{25}{30} + 4\frac{8}{30}$ (nach 140) $= 15\frac{33}{30}$ (nach 141, a) $= 15\frac{1}{10}$ (nach 137, 3).

9) $\frac{6\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{9}}{3} + \frac{9\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{7}}{8} = \frac{\frac{27}{4} \cdot \frac{10}{9}}{3} + \frac{\frac{49}{5} \cdot \frac{8}{7}}{8}$ (nach 141, a) $= \frac{\frac{15}{2}}{3} + \frac{\frac{56}{5}}{8}$ (nach 146) $= \frac{5}{2} + \frac{7}{5}$ (nach 137, 2) $= 3\frac{2}{10}$ (nach 141, a)

10) $5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{11}{2} \cdot \frac{4}{3}$ (nach 141, a) $\frac{11}{6} \cdot \frac{4}{15}$ (nach 137, 2)
$= \frac{22}{45}$ (nach 146 und 147)

11) $5\frac{1}{14} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{21}{14} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$ (nach 141, a) $= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$
(nach 137, 2) $= 2\frac{3}{8}8$ (nach 148) $\frac{1}{96}$ (nach 137, 3).

Allgemeine Formeln.

12) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{am} \cdot \frac{d}{cn} = \frac{acd}{abcmn} = \frac{d}{bmn}$ (148).

13) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right) = \frac{ad + bc}{bd} \cdot \frac{pn + qm}{qn}$ (nach 141, a)
$= \frac{(ad + bc)(pn + pm)}{bdqn}$ (nach 146).

14) $4\frac{1}{2}a \cdot 3\frac{1}{3} \cdot b = \frac{9}{2}a \cdot \frac{10}{3}b$ (nach 141, a) $= \frac{9}{2} \cdot \frac{10}{3}ab$ (146 Z.)
$= 15ab$ (nach 148).

15) $6\frac{3}{4}a \cdot 5\frac{1}{3}b = \frac{27}{4} \cdot \frac{16}{3}ab = 36ab$

16) $\frac{6\frac{2}{3}a}{m} = \frac{\frac{20}{3}a}{m} = \frac{\frac{20a}{3}}{m}$ (nach 137) $= \frac{20a}{2m}$ nach (137, 2).

17) $\frac{5\frac{1}{2}a}{m} \cdot \frac{7\frac{1}{3}b}{n} = \frac{\frac{11}{2}a}{m} \cdot \frac{\frac{22}{3}b}{n} = \frac{11a}{2m} \cdot \frac{22b}{3n} = \frac{242ab}{6mn}$

18) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = \frac{b - a}{ab} \cdot \frac{d - c}{cd}$ (nach 141, b) $=$
$\frac{bd - cd - ad + ac}{abcd}$ (nach 146 und 81)

19) $\left(\frac{m}{a} - 1\right)\left(\frac{n}{a} - 1\right) = \frac{m - a}{a} \cdot \frac{n - a}{a}$ (nach 141, b)
$= \frac{mn - (m + n)a + aa}{aa}$ (nach 146 und 81).

20) $\frac{m + n}{m + n} \cdot \frac{m - n}{m + n} = \frac{mm - nn}{mm + 2mn + nn}$ (nach 146, 81 u. 84).

21) $\left(\frac{m}{3} - \frac{n}{15}\right)\left(\frac{m}{5} - \frac{n}{10}\right) = \frac{5m - n}{15} \cdot \frac{2m - n}{10} = \frac{10mm - 7mn + nn}{150}$

22) $(5\frac{3}{4}a - 7\frac{1}{3}b - 1\frac{1}{4}c)(3\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4}b) = 20\frac{1}{8}aa - 32\frac{1}{48}ab$
$+ 9\frac{1}{6}bb - 4\frac{3}{8}ac + 1\frac{9}{16}bc$

23) $(7\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{2}{5}c)(\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{2}{5}c) = 1\frac{7}{8}aa - 1\frac{3}{16}ab + 2\frac{9}{10}ac$
$- \frac{1}{16}bb + \frac{1}{5}bc - \frac{4}{25}cc$

24) $(\frac{1}{3}a - b - 1)(a - \frac{1}{5}b - \frac{1}{7}) = \frac{1}{3}aa - 1\frac{1}{15}ab - 1\frac{1}{21}a + \frac{1}{5}bb$
$+ \frac{12}{35}b + \frac{1}{7}$.

Die 3 letzten Beispiele nach 81, 84, 141 und 146.

150) Es läßt sich fragen, wie oft ein Bruch in einem oder mehrern Ganzen, wie oft er in einem andern Bruch ent=

halten sey, dieß gibt also eine Division einer Zahl oder eines Bruches durch einen Bruch, und man sieht, daß diese nur als Messen denkbar ist.

Beispiele. 1) Fragt man, wie oft $\frac{3}{5}$ fl. in 6 fl. enthalten sind, so muß man die 6 fl. erst in Fünfteln ausdrücken, 6 fl. $= \frac{30}{5}$ fl. 3 Fünftel sind in 30 Fünfteln eben so oft enthalten, als überhaupt 3 Einheiten in 30 Einheiten derselben Art, nämlich 10mal. Oder bezeichnet:

$$\frac{6}{\frac{3}{5}} = \frac{(\frac{30}{5})}{\frac{3}{5}} = \frac{30}{3} = 10$$

2) $\frac{2}{3}$ tb. sind in 5 tb. eben so oft enthalten, als $\frac{2}{3}$ tb. in $\frac{15}{3}$ tb., nämlich 7 und $\frac{1}{2}$ mal.

$$\frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{(\frac{15}{3})}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

3) $1\frac{1}{5}$ tb. sind in 3 tb. eben so oft enthalten, als $\frac{6}{5}$ tb. in $\frac{15}{5}$ tb., nämlich 2 und $\frac{1}{2}$ mal.

$$\frac{3}{1\frac{1}{5}} = \frac{\frac{15}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$$

In allen Fällen gibt auch hier der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt den Dividenden.

z. B. $10 \cdot \frac{3}{5} = 6$

$7\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 5$

$1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2} = 3$

Aus der Vergleichung der Brüche $\frac{30}{3}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{15}{6}$ mit der Aufgabe selbst läßt sich die Regel ableiten: Eine Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man sie mit dem Nenner multiplicirt und mit dem Zähler das Product dividirt; oder, wenn man sie mit dem umgekehrten Bruch multiplicirt.

$$\frac{4}{(\frac{2}{3})} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{5}{\frac{6}{7}} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$$

$$\frac{9}{\frac{3}{8}} = \frac{72}{3} = 24$$

$$\frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

$$\frac{a}{\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{an}{m}, \quad \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{n}{m}, \quad \frac{1}{\frac{1}{m}} = m$$

Diese Regel mit den vorhergehenden verbunden, erläutert folgende Umformungen:

1) $\frac{5}{1\frac{1}{5}} + \frac{3}{1\frac{1}{2}} = \frac{5}{\left(\frac{6}{5}\right)} + \frac{3}{\frac{3}{2}}$ (nach 141, a) $= \frac{25}{6} + \frac{6}{3}$ (nach 150)
$= 4\frac{1}{6} + 2$ (nach 138) $= 6\frac{1}{6}$

2) $\frac{3}{1\frac{1}{4}} \cdot \frac{2}{2\frac{1}{2}} = \frac{3}{\left(\frac{5}{4}\right)} \cdot \frac{2}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{5}$ (nach 150) $= \frac{48}{25}$ (nach 146).

3) $\frac{7}{(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3})} = \frac{7}{2\frac{5}{6}} = \frac{7}{\frac{17}{6}} = \frac{42}{17} = 2\frac{8}{17}$

4) $\frac{1}{1\frac{1}{2}} + \frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{\frac{3}{2}}{2}$ (nach 141, a) $= \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ (nach 150
und 137, 2) $= \frac{17}{12}$ (nach 141, a) $= 1\frac{5}{12}$ (nach 138).

5) $\frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{5} = \frac{15}{4} + \frac{3}{20} = \frac{78}{20} = 3\frac{18}{20} = 3\frac{9}{10}$

6) $\frac{a}{\left(\frac{m}{n}\right)} + \frac{b}{\left(\frac{m}{p}\right)} = \frac{an}{m} + \frac{bp}{m}$ (nach 150) $= \frac{an + bp}{m}$ (nach 141, a).

7) $\frac{a}{\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{a}{\left(\frac{5}{6}\right)} - \frac{a}{\left(\frac{15}{11}\right)} = \frac{4a}{3} + \frac{6a}{5} - \frac{11a}{15}$ (nach 150) $=$
$\frac{20a + 18a - 11a}{15}$ (nach 141, a) $= \frac{27a}{15}$ (nach 84) $= \frac{9a}{5}$
(nach 137, 3) $= 1\frac{4}{5} \cdot a$ (nach 138).

8) $\frac{1}{\left(\frac{a}{m+n}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{a}{m-n}\right)} = \frac{m+n}{a} + \frac{m-n}{a}$ (nach 150) $=$
$\frac{2m}{a}$ (nach 141, 1).

151) Soll man einen Bruch mit einem Bruch dividiren, so kann auch hier nichts anders gefragt werden, als wie oft der Bruch in dem andern enthalten sey: die Division kann auch hier nur ein Messen seyn.

Beisp. Verlangt man zu wissen, wie oft $\frac{2}{3}$ fl. in $\frac{6}{7}$ fl. enthalten sind, so müssen erst beide gleichbenannt seyn. $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$, $\frac{6}{7} = \frac{18}{21}$; es fragt sich also, wie oft $\frac{14}{21}$ in $\frac{18}{21}$ enthal-

ten sey. Diese sind aber eben so oft darin enthalten, als überhaupt 14 Dinge in 18 Dingen, nämlich $1\frac{4}{14}$ oder $1\frac{2}{7}$ mal. Man sieht dieß auch daraus, daß $1\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{7}$ ist. Bezeichnet wird dieß so:

$$\frac{\frac{6}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{18}{21}}{\frac{14}{21}} = \frac{18}{14} = 1\frac{4}{14}$$

Beisp. 2. Wie oft sind $\frac{3}{5}$ fl. in $\frac{7}{8}$ fl. enthalten? $\frac{3}{5}$ sind so oft in $\frac{7}{8}$ enthalten, als $\frac{24}{40}$ in $\frac{35}{40}$, nämlich $1\frac{1}{24}$ mal.

$$\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{35}{40}}{\frac{24}{40}} = \frac{35}{24} = 1\frac{1}{24}$$

Beisp. 3. Wie oft ist $1\frac{1}{3}$ in $5\frac{1}{2}$ enthalten? $1\frac{1}{3}$ ist in $5\frac{1}{2}$ so oft enthalten, als $\frac{4}{3}$ in $\frac{11}{2}$; diese so oft, als $\frac{8}{6}$ in $\frac{33}{6}$, nämlich $4\frac{1}{8}$ mal.

$$\frac{5\frac{1}{2}}{1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{33}{6}}{\frac{8}{6}} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$$

Es ist auch $5\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{8}$

Bedenkt man nun, daß es in diesen drei Beispielen nur auf die letzten Quotienten $\frac{18}{14}$, $\frac{35}{24}$, $\frac{33}{8}$ ankommt und daß diese aus den gegebenen Brüchen sich durch folgende Multiplikation ableiten lassen: $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}$, $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{3}$, $\frac{11}{2} \cdot \frac{3}{4}$, so kann man die Regel aufstellen:

Ein Bruch wird durch einen andern dividirt, wenn man ihn mit dem umgekehrten Bruche multiplizirt. Denn im ersten Beispiel ist $\frac{18}{14} = \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}$; im zweiten $\frac{35}{24} = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{3}$; im dritten $\frac{33}{8} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{4}$. Man hat also angemein:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$$

Zusatz 1. Kommen in den Zählern und Nennern der neben einander als Factoren gesetzten Brüche gemeinschaftliche Factoren vor, so lasse man diese weg (137, 3).

Z. B. $\frac{5\frac{3}{5}}{1\frac{2}{5}} = \frac{\frac{28}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{28 \cdot 5}{5 \cdot 7} = 4$

$$\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{ad}{e}} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{e}{ad} = \frac{be}{cd}, \quad \frac{\frac{3}{a}}{\frac{12}{b}} = \frac{3}{a} \cdot \frac{b}{12} = \frac{b}{4a}$$

$$\frac{\frac{5a}{6}}{\frac{7a}{12}} = \frac{5a}{6} \cdot \frac{12}{7a} = \frac{10}{7}, \quad \frac{5\frac{1}{2}a}{7\frac{1}{6}b} = \frac{\frac{11a}{2}}{\frac{43b}{6}} = \frac{11a}{2} \cdot \frac{6}{43b} = \frac{33a}{43b}$$

$$\frac{6\frac{1}{3}ab}{3\frac{3}{4}a} = \frac{\frac{19ab}{3}}{\frac{15a}{4}} = \frac{19ab}{3} \cdot \frac{4}{15a} = \frac{76b}{45}$$

$$\frac{3\frac{5}{7}a}{\frac{4b}{7c}} = \frac{\frac{26a}{7}}{\frac{4b}{7c}} = \frac{26a}{7} \cdot \frac{7c}{4b} = \frac{13ac}{2b}$$

Zusatz 2. Sind die Brüche gleichbenannt, so dividire man Zähler durch Zähler.

Z. B. $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{3}$ oder $\frac{3\frac{1}{4}}{1\frac{1}{4}} = \frac{\frac{13}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

Denn nach dem Satz selbst und der Hauptregel hätte man:

$$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{5}{3} \text{ und } \frac{3\frac{1}{4}}{1\frac{1}{4}} = \frac{13}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{5}$$

Oder auch nach 137, 3. erklärt.

152) Diese Regel, mit allen vorigen verbunden, erläutert alle Umformungen, die durch Multiplikation und Division vorgenommen werden können.

Beispiele.

1) $\frac{5\frac{1}{4}+1\frac{1}{5}}{1\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}} = \frac{6\frac{9}{20}}{3\frac{5}{6}}$ (nach 141, 1) $= \frac{\frac{129}{20}}{\frac{23}{6}} = \frac{120}{20} \cdot \frac{6}{23}$ (nach 151) $= \frac{387}{230}$ (nach 151. Z. 1.)

2) $\frac{\left(\frac{\left(\frac{9}{10}\right)}{2}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{8}{9}\right)}{10}\right)} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{\left(\frac{8}{9}\right)}{10.12}}$ (nach 137, 2) $= \frac{\frac{9}{20}}{\frac{8}{9.10.42}}$

$= \frac{9.9.10.12}{20.8}$ (nach 151) $= \frac{243}{4}$ (nach 151. Z. 1.) $= 60\frac{3}{4}$ (nach 138).

3) $\frac{\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{6}}$ (nach 137, 2) $= \frac{6}{20}$ (nach 151) $= \frac{3}{10}$ (nach 137, 3).

4) $\frac{\frac{7}{\left(\frac{2}{5}\right)}}{\frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{6}} = \frac{\frac{35}{2}}{\frac{4}{30}}$ (nach 150 und 137, 2) $= \frac{35 \cdot 30}{2 \cdot 4}$ (nach 151)

$= 5\frac{25}{4}$ (nach 151. Z. 1.) $= 131\frac{1}{4}$

5) $\frac{7\frac{1}{4} - 6\frac{1}{3}}{\frac{1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}}{9\frac{1}{5} - 8\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{4}{15}}$ (nach 141) $= \frac{\frac{11}{12} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{8}{15} \cdot \frac{12}{11}}$ (nach 151) $=$

$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{32}{55}}$ (nach 151. Z. 1.) $= \frac{55}{96}$ (nach 151).

6) $\frac{(4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}) \cdot 1\frac{1}{4}}{(6\frac{1}{5} - 5\frac{1}{2}) \cdot 1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{3}}$ (nach 141) $= \frac{5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4}$ (nach 151) $= 3\frac{75}{224}$ (nach 151. Z. 1.) $= 1\frac{51}{224}$

7) $\frac{\frac{1}{1\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\frac{4}{3}}}$ (nach 141) $= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}$ (nach 150) $= \frac{8}{9}$ (nach 151)

8) $\frac{1}{\left(\frac{1}{4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{5\frac{1}{2}}{1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}}\right)} = 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} + \frac{1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}}{5\frac{1}{2}}$

(nach 150) $= 3\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{12}}{\frac{11}{2}}$ (nach 141, a) $= 3\frac{1}{6} + \frac{1}{66}$ (nach 151) $= 3\frac{2}{11}$ (nach 141).

9) $\frac{3}{1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}} - \frac{1}{1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{1}{4}} + \frac{6}{3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{7}} = \frac{3}{\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5}} - \frac{1}{\frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{5}{4}}$

$+ \frac{6}{\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{7}}$ (nach 141) $=$

$\frac{3}{15} - \frac{1}{12} + \frac{6}{75}$ (nach 148) $= \frac{12}{15} - \frac{7}{12} + \frac{42}{75}$ (nach 150) $=$

$\frac{240}{300} - \frac{175}{300} + \frac{168}{300} = \frac{408 - 175}{300} = \frac{233}{300} = \frac{33}{50}$ (nach 141).

10) $\frac{(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3})(2\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5})}{(3\frac{4}{5} - 2\frac{1}{2})(1\frac{2}{7} - \frac{3}{4})} = \frac{\frac{17}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{13}{10} \cdot \frac{15}{28}}$ (nach 141) $=$

$\frac{17 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 28}{6 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 15}$ (nach 151) $= \frac{952}{585}$ (nach 151. Z. 1) $= 1\frac{367}{585}$

11) $\frac{5\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{11}}{4\frac{1}{5}\cdot 3\frac{3}{5}\cdot 4\frac{1}{6}} = \frac{\frac{11}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{27}{11}}{\frac{21}{5}\cdot\frac{18}{5}\cdot\frac{25}{6}} = \frac{11.8.27.5.5.6}{2.3.11.21.18.25} = \frac{4}{7}$

12) $\frac{\left(\frac{\left(4\frac{1}{2}\right)}{1\frac{1}{3}}\right)}{\left(\frac{\left(3\frac{1}{4}\right)}{1\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\left(\frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\frac{4}{3}}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{13}{4}\right)}{\frac{3}{2}}\right)}$ (nach 141) $= \frac{\frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}}{\frac{\frac{13}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}}$ (nach 137, 2) $= \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{13}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}}$ (nach 151) $= \frac{9.3.4.4.3.5}{2.4.5.13.2.2}$ (nach 151) $= \frac{81}{26}$ (nach 151. Z. 1.) $= 3\frac{3}{26}$

13) $\frac{5\frac{1}{2}}{4} - \frac{3\frac{1}{5}}{1\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{7\frac{1}{4}}{3}\right)}{3} + \frac{5}{8\frac{1}{2}-6\frac{2}{3}} = \frac{11}{8} - \frac{16}{6}\cdot\frac{2}{5} + 1\frac{29}{2}\cdot\frac{5}{3} + \frac{5\cdot 6}{11}$

$= 1\frac{3}{8} - 2\frac{2}{15} + \frac{29}{36} + 2\frac{8}{11} = 1 + \frac{3.495-2.264+29.110+8.360}{2.2.2.3.3.5.11}$

$= 1 + \frac{1485-528+3190+2880}{3960} = 1\frac{7555-528}{3960}$

$= 1\frac{7027}{3860} = 2\frac{3067}{3960}$

14) $5\frac{1}{2}\cdot\frac{3\frac{1}{4}}{5} - 3\frac{1}{3}\cdot\frac{3\frac{1}{4}}{5} = (5\frac{1}{2}-3\frac{1}{3})\cdot\frac{3\frac{1}{4}}{5} = \frac{13}{6}\cdot\frac{13}{20} = \frac{169}{120}$

$= 1\frac{49}{120}$

15) $\frac{4\frac{1}{6}}{5} - \frac{3\frac{1}{2}}{15} + \frac{5\frac{2}{3}}{10} = \frac{4\frac{1}{6}\cdot 6 - 3\frac{1}{2}\cdot 2 + 5\frac{2}{3}\cdot 3}{30} = \frac{25-7+17}{30}$

$= \frac{35}{30} = 1\frac{1}{6}$

16) $\frac{1}{1\frac{1}{2}} + \frac{2}{4\frac{1}{2}} + \frac{5}{3} = \frac{6+4+15}{6.1\frac{1}{2}} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$

oder $= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{3} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$

Bemerkung. Dadurch, daß man die Factoren erst am Ende der Rechnung wirklich multiplicirt, ist man gewöhnlich im Stande, die Abkürzungen der Rechnung durch Verkleinerung der Zahlen leichter zu bemerken, was deßhalb zu empfehlen ist.

Allgemeine Formen.

1) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = \frac{\frac{ad+bc}{bd}}{\frac{mq+np}{nq}}$ (nach 141) $= \frac{(ad+bc)nq}{(mq+np).bd}$ (nach 151)

2) $\dfrac{\frac{a}{5}+\frac{c}{3}}{\frac{m}{5}+\frac{n}{3}} = \dfrac{3a+5c}{3m+5n}$

3) $\dfrac{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}{\frac{m}{3}-\frac{n}{4}} = \dfrac{\frac{n-m}{mn}}{\frac{4m-3n}{12}}$ (nach 141, b) $= \dfrac{12\,(n-m)}{mn\,(4m-3n)}$ (nach 151).

4) $\dfrac{a-b+c+ma-mb+mc}{1+m} = \dfrac{(a-b+c)\;(m+1)}{1+m}$ (nach 84) $= a-b+c$ (nach 137, 3).

5) $\dfrac{\frac{am+an}{p}}{\frac{am-an}{q}} = \dfrac{(am+an)\,q}{(am-an)\,.\,p}$ (nach 151) $= \dfrac{(m+n)\,q}{(m-n)\,p}$ (nach 84 und 137, 3).

6) $\dfrac{\frac{1}{m\,.\,n}}{\frac{1}{mp}} = \dfrac{mp}{mn}$ (nach 151) $= \dfrac{p}{n}$ (nach 137, 3).

7) $\dfrac{\left(\frac{\frac{m}{n}}{p}\right)}{\left(\frac{\frac{m}{n}}{q}\right)} = \dfrac{\frac{m}{np}}{\frac{m}{nq}}$ (nach 137, 2) $= \dfrac{m\,.\,nq}{mnp}$ (nach 151) $= \dfrac{q}{p}$ (nach 137, 3).

8) $\dfrac{5\,a}{3b}-\dfrac{\frac{1}{2}a}{3b} = \dfrac{9a}{6b}$

9) $\dfrac{3}{4}ab-\dfrac{2}{3}ab = \dfrac{1}{12}ab$

10) $\dfrac{7a}{bc}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{a}{bc} = \dfrac{31a}{4bc}$

11) $5\frac{1}{4}ab-1\frac{1}{2}ab-3\frac{1}{3}ba = \dfrac{5}{12}ab$

12) $\dfrac{3a}{5b}+\dfrac{7a}{8b} = \dfrac{59a}{40b}$

13) $\dfrac{11\frac{1}{2}a}{b}-\dfrac{7\frac{1}{3}a}{2b} = \dfrac{15\frac{2}{3}a}{2b} = \dfrac{47a}{6b}$

14) $\dfrac{1\frac{1}{4}a}{1\frac{1}{5}b}-\dfrac{7\frac{1}{2}a}{9\frac{1}{3}b} = \dfrac{25\,a}{24b}-\dfrac{45a}{56b} = \dfrac{175a-135a}{168b} = \dfrac{40\,a}{168b} = \dfrac{5\,a}{21\,b}$

15) $\frac{\left(\frac{1}{\frac{m}{n}}\right)}{\frac{1}{\left(\frac{n}{m}\right)}} = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{m}{n}}$ (nach 150) $= \frac{nn}{mm}$ (nach 151).

16) $\frac{a + \frac{m}{n}}{b + \frac{m}{n}} = \frac{an + m}{bn + m}$

17) $\frac{1 - \frac{m}{n}}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{n - m}{n + m}$

18) $\frac{1 - \frac{m}{n}}{p} + \frac{1 + \frac{m}{n}}{p} = \frac{2}{p}$

19) $\frac{1 + \frac{m}{n}}{p} + \frac{2 + \frac{m}{n}}{p} = \frac{3n + 2n}{np}$

20) $\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)\left(\frac{3m}{4n} + \frac{2p}{q}\right) = \frac{3mm}{4nn} + \frac{3mp}{4nq} + \frac{2mp}{nq} + \frac{2pp}{qq}$ (nach 81) $= \frac{3mm}{4nn} + \frac{3mp + 8mp}{4np} + \frac{2pp}{qq}$ (nach 137, 1) $= \frac{3mm}{4nn} + \frac{11mp}{4nq} + \frac{2pp}{qq}$ (84 und 137, 3).

21) $(3a + 5b - \frac{7}{2}c)(a - 2b + 9c) = 3aa - ab + \frac{47}{2}ac - 10bb + 52bc - \frac{63}{2}cc$ (nach 81 und 84, dann 137).

22) $(3c - 5d + \frac{3}{4}g - \frac{5}{3}h)(\frac{2}{3}c - d + 7g + \frac{1}{2}h) = 2cc - \frac{19}{3}cd + \frac{43}{2}cg + \frac{7}{18}ch + 5dd - \frac{143}{4}dg - \frac{5}{6}dh + \frac{21}{4}gg - \frac{217}{24}gh - \frac{5}{6}hh$

23) $\left(\frac{5aa}{b} - \frac{7ab}{4c} + 3a\right)\left(\frac{7c}{a} + \frac{2a}{b}\right) = \frac{35ac}{b} - \frac{49b}{4c} + 21c + \frac{10aaa}{bb} - \frac{7aa}{2c} + \frac{6aa}{b}$

153) Oben (111) wurde die Betrachtung des Rests bei der Division auf den Abschnitt vom Bruchrechnen verwiesen. Diese kann nunmehr vorgenommen werden.

a) Fragt man, was der 5te Theil ist von 7 fl. so erhält man nach (136) zur Antwort $\frac{7}{5}$ fl. $= 1\frac{2}{5}$ fl.

Diese $1\frac{2}{5}$ fl. hätte man auch so erhalten, wenn man sich 7 fl. in 5 fl. + 2 fl. zerlegt und erst 5 fl. und dann

2 fl. durch 5 getheilt gedacht hätte. Denn $\frac{7\,\text{fl.}}{5} = \frac{5\,\text{fl.}}{5}$ $+\frac{2\,\text{fl.}}{5} = 1\,\text{fl.} + \frac{2}{5}\,\text{fl.}$ oder $1\frac{2}{5}\,\text{fl.}$

Eben so hat man $\frac{59\,\text{fl.}}{6} = 9\frac{5}{6}\,\text{fl.}$

Jene 2 fl. nun und diese 5 fl. wurden oben als Rest betrachtet. Ist also die Division eine Theilung, so gibt der Rest weiter getheilt einen Bruch, dessen Zähler er selbst, dessen Nenner der Divisor ist.

Beisp. $\frac{5897}{8} = 734$, Rest 7 Ganze ungetheilt, oder $734 + \frac{7}{8} = 734\frac{7}{8}$ vollständiger 8ter Theil von 5879.

b) Fragt man aber, wie oft 6 fl. in 59 fl. enthalten sind, so ist die Antwort zunächst 9 mal, Rest 5 fl. Eigentlich heißt dieß aber, 6 fl. sind in 54 fl. 9 mal enthalten: wie oft sie aber in 5 fl. gehen, läßt sich nur dann begreifen, wenn man sich 6 fl. getheilt denkt und angibt, wie oft ein Theil von 6 fl. oder 1 fl. in 5 fl. euthalten sey. Dieser 1 fl. ist von 6 fl. $\frac{1}{6}$, oder 6 fl. ist in 1 fl. $\frac{1}{6}$ mal enthalten; 1 fl. ist aber in 5 fl. 5 mal enthalten: es ist also 6 fl. in 5 fl. $\frac{5}{6}$ mal enthalten. Das heißt, so wie $54 = 6 \cdot 9$ fl., so ist 5 fl. $= 6 \cdot \frac{5}{6}$ fl. Es ist also im Ganzen 59 fl. $= (9\frac{5}{6}) \cdot 6$ fl. d. h. $9\frac{5}{6}$ ist die Zahl, welche anzeigt, wie oft 6 fl. in 59 fl. enthalten ist. Diese bekam man aber auch nach der ersten Art der Division: es ist also für das Ergebniß in Zahlen gleichgiltig, ob man sie als Theilung oder Messung sich denkt: nur muß man jedesmal die Beschaffenheit der Aufgabe wohl erwägen, um das Herausgekommene richtig zu beurtheilen.

Man kann also jede Zahl durch eine andere dividiren und wenn ein Rest bleibt, diesen als Zähler eines Bruches betrachten, dessen Nenner der Divisor ist, um den ganzen Quotienten zu erhalten.

Beisp. 321 | 2793 | $8\frac{7}{3}\frac{2}{2}\frac{5}{1}$
2568 |

225

Anmerkung. Was oben schon bemerkt wurde, das ist indeß auch hier zu wiederholen. Man darf nämlich diese

$8\frac{2}{3}\frac{5}{1}$ nicht als eine Zahl sich denken, sondern muß erst wohl bedenken, daß sie nichts anders heißen, als entweder 321 ist in 2793 8mal und $\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1}$ von 321 noch 225mal enthalten, oder der 321 Theil von 2793 Einheiten ist 8 Einheiten und von einer derselben der 321ste Theil 225 mal genommen.

154) Wie bei der Subtraction ein Ausdruck wie $3-5$ eigentlich keinen Sinn hat und diesen erst durch die Art der Größe bekommt, welche die Einheit von 3 und 5 ist oder durch die Verbindung mit andern Größen, wie in $6+(3-5)=(6+3)-5=4$, so hat bei der Division die Verbindung $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{1}$ u. dgl., wenn sie ohne weitere Angabe allein stehen, keine Bedeutung. Wohl aber können sie, auf ein theilbares Ganzes bezogen, einen richtigen Sinn geben, wie bereits (130) erläutert worden ist. Sind sie mit andern Ausdrücken, wie es meist der Fall ist, verbunden, so muß man das Ergebniß der ganzen Rechnung betrachten, um über die Denkbarkeit zu urtheilen.

Setzt man also diese Verbindung des allgemeinen Zeichens $\frac{a}{b}$ mit andern Zahlen oder Größen voraus, so hat es bloß den Sinn einer Anweisung, die untergestellte Einheit mit b zu dividiren und mit a zu multipliziren, wenn nicht b ein Factor von a oder a durch b theilbar ist. Da man also bei der wirklichen Verbindung nicht im Zweifel seyn kann, welche Bedeutung $\frac{a}{b}$ hat, so läßt man alle Verbindungen, in denen $\frac{a}{b}$ vorkommt, allgemein gelten; auch wenn $\frac{a}{b}$ nur in reinen Zahlen angegeben und dabei $a < b$ ist. Dann lassen sich die von $\frac{a}{b}$ als Bruch, d. h. unter der Annahme angegebenen Sätze, daß a theilbare Einheiten habe, auch für $\frac{a}{b}$ als Quotienten, d. h. für reine Zahlwerthe von a und b allgemein aussprechen.

Beispiele.

1) $\frac{3}{4}$ hat als Quotient, d. h. unter der Voraussetzung, 3 sey durch 4 gemessen oder getheilt keinen Sinn, wenn die Einheit von 3 die nicht weiter theilbare Eins ist. Sind aber 3 Ganze durch 4 zu theilen, so hat $\frac{3}{4}$ eine denkbare Bedeutung, z. B. als $\frac{3}{4}$ fl., $\frac{3}{4}$ tb. u. s. f.

$\frac{3}{4}$ gibt aber auch, mit irgend andern Zahlen auf richtige Weise verbunden, einen richtigen Werth. Z. B. $\frac{3}{4} . 4 = 3$, $\frac{3}{4} . 8 = \frac{24}{4} = 6$ u. s. f., so daß also während der Rechnung eine nähere Betrachtung der Bedeutung von $\frac{3}{4}$ eben so wenig nöthig ist, als von $3 - 4$, welches, an sich undenkbar, doch in $(3 - 4) + 8 = (3 + 8) - 4 = 11 - 4 = 7$ einen möglichen Werth gibt.

2) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{15}} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ ist nur dann verständlich, wenn im ersten, 2ten und 3ten Ausdruck die Division messend genommen wird. In 4 und $\frac{1}{2}$ ist die dem Ausdruck zum Grunde liegende Einheit $\frac{2}{15}$, und es sagt nichts Anderes, als $\frac{2}{15}$ 4 mal genommen und dazu noch die Hälfte von $\frac{2}{15}$ gefügt, gibt $\frac{3}{5}$.

3) $\frac{3}{8} . \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$. Hier ist entweder $\frac{3}{8}$ oder $\frac{2}{7}$ auf das Ganze zu beziehen, und dann heißt es, von einem Ganzen, das in 7 Theile getheilt ist, hat man 2 Theile genommen; diese darauf 3 mal genommen und das Product durch 8 getheilt; worauf man $\frac{6}{56}$ desselben Ganzen erhielt; deren 2 in einem verbunden, $\frac{3}{28}$ geben.

155) Besondere Formen ergeben sich ferner auf folgende Art:

1) $\frac{4}{5-4} = \frac{4}{1}$ $\frac{a}{m+1-m} = \frac{a}{1}$

Man mag $\frac{a}{1}$ theilend oder messend betrachten, so kommt die Zahl a, nur im ersten Fall benannt, im andern unbenannt. Denn 1 fl. ist in 7 fl. 7 mal enthalten. Wird 7 fl. in 1 Theil getheilt, so ist es gar nicht getheilt, es bleibt unverändert. $\frac{7 \text{ fl.}}{1 \text{ fl.}} = 7$, $\frac{7 \text{ fl.}}{1} = 7 \text{ fl.}$

Es ist also immer $\frac{a}{1} = a$, denn es ist auch $a = a . 1$. (73. 1).

2) Da $\frac{a - a}{m} = \frac{0}{m}$, so fragt sich, was $\frac{0}{m}$ wirklich bedeute. Eine Größe ist in Nichts kein oder 0 Mal enthalten und Nichts in m Theile getheilt gibt Nichts: man erhält also $\frac{0}{m} = 0$. Dieß bestätigt sich dadurch, daß $0 = m . 0$. (Nach 83).

3) Dagegen $\frac{m}{a-a} = \frac{m}{0}$ hat selbst in Verbindung mit andern Ausdrücken keine Bedeutung. Denn es läßt sich weder angeben, wie oft 0 genommen m gäbe, noch was der Theil von m ist, wenn es durch 0 getheilt wird. Wo also diese Form vorkommt, ist sie als ein Zeichen der Unbestimmtheit zu betrachten.

4) $\frac{3-4}{5} = \frac{0-1}{5}$ (nach 68) $= \frac{0}{5} - \frac{1}{5}$ (nach 118) $=$ $0 - \frac{1}{5}$ (nach 155. 2) $= -\frac{1}{5}$

so ist immer $\frac{-a}{m} = -\frac{a}{m}$

Daher $\frac{-a}{m} \cdot \frac{-b}{n} = \frac{ab}{m}$ (83).

5) $\frac{4}{1-6} = \frac{4}{0-5} = \frac{4}{-5}$

Da nun $(-5)\,(-\frac{4}{5}) = 5 \cdot \frac{4}{5}$ (nach 83) $= 4$, so ist (nach 102) $\frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$ folglich kann man setzen: $\frac{a}{-m} = -\frac{a}{m}$

6) $\frac{-3}{-4} = \frac{(-1)3}{(-1)4}$ (nach 83) $= \frac{3}{4}$ (nach 137. 3.) Daher ist allemal $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$. Dieß sieht man auch daraus, daß $(-a)\,b = (-b)\,a$ ist (nach 82).
Hieraus erhält man folgende Regeln:

a) negative Zahlen durch positive und positive durch negative dividirt, geben einen negativen Quotienten; oder richtiger: man darf die Zeichen im Dividend oder Divisor umkehren, wenn man dem Quotienten das entgegengesetzte Zeichen gibt. Z. B.

1) $\frac{-ab}{m} = -\frac{ab}{m}$, $\frac{a}{-bm} = -\frac{a}{bm}$

$\frac{-a+b}{m} = -\frac{a-b}{m}$, $\frac{-a-b}{m} = -\frac{a+b}{m}$

$\frac{a-b-c}{m} = -\frac{-a+b+c}{m}$, $\frac{3-4}{5} = -\frac{4-3}{5}$

Daher $7 - \frac{3-7}{9} = 7 + \frac{7-3}{9} = 7\frac{4}{9}$

$a - \frac{-m-n}{p} = \frac{ap+m+n}{p}$

2) $\frac{m}{-bn} = -\frac{m}{bn}$, $\frac{m}{-a-b} = -\frac{m}{a+b}$

$$\frac{m}{a-b} = -\frac{m}{-a+b}, \quad \frac{m}{a-b-c} = -\frac{m}{-a+b+c}$$

$$5+\frac{7}{3-9} = 5-\frac{7}{-3+9} = 5-\frac{7}{6}$$

$$8-\frac{3}{2-7} = 8+\frac{3}{-2+7} = 8+\tfrac{3}{5}$$

b) Eine negative Zahl durch eine negative dividirt, gibt einen positiven Quotienten; oder: man kann, ohne daß sich der Werth des Quotienten ändert, die Zeichen im Dividend und Divisor zugleich umkehren.

z. B. $\frac{1-3}{2-5} = \frac{-1+3}{-2+5} = \frac{2}{3}$

$$\frac{a-b}{m-n} = \frac{-a+b}{-m+n}, \quad \frac{a(-m)}{(-n)b} = \frac{ma}{nb}$$

$$\frac{a-b-c}{+a+b+c} = \frac{b+c-a}{-a-b-c} = -\frac{b+c-a}{a+b+c}$$

Aus beiden Regeln zugleich ergeben sich folgende Umformungen:

1) $\dfrac{1-\frac{1}{-3}}{-1+\frac{1}{-2}} = \dfrac{1+\frac{1}{3}}{-1-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2}} = -\tfrac{8}{9}$

2) $\dfrac{-1+\frac{7}{8}}{-2+\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{5}} = \tfrac{5}{56}$

3) $\dfrac{a}{-m}+\dfrac{b}{-n}-\dfrac{d}{-p} = -\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}+\dfrac{d}{p} = \dfrac{-anp-bmp+dmn}{mnp}$

4) $\dfrac{a}{-m}+\dfrac{-b}{m} = -\dfrac{a+b}{m}$

5) $\dfrac{\frac{a}{-m}+\frac{b}{m}}{\frac{a}{-n}-\frac{b}{n}} = \dfrac{\frac{-a+b}{m}}{\frac{-a-b}{n}} = \dfrac{(a-b)\,n}{(a+b)\,m}$

6) $\dfrac{-\frac{5bc}{3}}{\frac{1}{2}b} = -\dfrac{10c}{3}$

7) $\dfrac{-\frac{35ad}{12}}{-\frac{7nd}{8}} = \dfrac{10a}{3n}$

8) $\dfrac{-11\frac{1}{8}}{1\frac{1}{8}am} = -\dfrac{89}{9m}$

9) $\dfrac{-\frac{3}{5}ab}{-\frac{7}{10}aa} = \dfrac{6b}{7a}$

10) $\dfrac{\frac{4cd}{fgh}}{-\frac{1}{fgh}} = -4cd$

11) $\dfrac{\frac{3cc}{mm}}{-\frac{1}{a}\left(-\frac{c}{m}\right)} = \dfrac{3ac}{m}$

12) $\frac{\frac{15ab}{28}}{-\frac{5a}{4}} = -\frac{3b}{7}$, 13) $\frac{\frac{1}{6f}}{\frac{-h}{2fg}} = -\frac{g}{3h}$

156) Bei der Division mehrtheiliger Ausdrücke läßt sich wie bei der Division vielzifferiger Zahlen verfahren. Folgende Beispiele mit eingliederigem Divisor werden keine Erläuterung bedürfen.

1) $\frac{30ag + 15bg - 25fg}{5g} = 6a + 3b - 5f$

2) $\frac{3a}{5d}\left|\frac{3aa}{bd}\right. - \frac{39ac}{10dd} - \frac{18ah}{25bdg} + \frac{21a}{5}\left|\frac{5a}{b}\right. - \frac{13c}{2d} - \frac{6h}{5bg} + 7d$

$\frac{3a \cdot 5a}{5d \cdot b} - \frac{3 \cdot 13ac}{5 \cdot 2dd} - \frac{3a \cdot 6h}{5d \cdot 5bg} + \frac{3a \cdot 7d}{5d} =$ dem Dividenden

3) $\frac{3ac - 2ade - f}{2a} = \frac{3}{2}c - de - \frac{f}{2a}$

4) $\frac{5\frac{1}{2}a - 7\frac{1}{3}b + \frac{2}{5}c}{\frac{1}{2}abc} = \frac{11}{bc} - \frac{44}{3ac} + \frac{4}{5ab}$

5) $\frac{7\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{5}bc - 1\frac{1}{4}cd}{-4\frac{1}{3}a} = -\frac{22}{13} + \frac{18bc}{65a} + \frac{15cd}{52a}$

6) $\frac{\frac{ab}{c} - \frac{m}{2n}}{\frac{2m}{n}} = \frac{abn}{2mc} - \frac{1}{4}$

Für mehrgliederige Divisoren bedenke man, daß da nach (81) jedes Glied des einen Factors mit jedem Glied des andern multiplicirt das Product gibt, jedes Glied des Divisors gleich oft in dem Dividenden enthalten seyn muß, wenn anders Divisor und Quotient multiplicirt den Dividenden geben sollen. Man dividire also das erste oder ein anderes Glied des Dividenden mit dem ersten Gliede des Divisors $\frac{ad}{d} = a$ so ist a das erste Glied des Quotienten; multiplicire mit diesem Gliede des Quotienten jedes Glied des Divisors und ziehe diese Producte von den Gliedern des Dividenden ab, mit welchen sie gleiche Factoren haben und fahre so fort bis die Division aufgeht:

1) $d-e \,|\, ad+bd-cd-ae-be+ce \,|\, a+b-c$

$$ad \qquad -ae$$

$$+bd-cd-be+ce$$
$$+bd \qquad -be$$

$$-cd \qquad +ce$$
$$-cd \qquad +ce$$

2) $a-b \,|\, aa-2ab+bb \,|\, a-b$

$$aa-\;bb$$

$$-ab+bb$$
$$-ab+bb$$

$$0$$

3) $a-2b+9c \,|\, 3aa-ab+\tfrac{47}{2}ac-10bb+52bc-\tfrac{63}{2}cc \,|\, 3a+5b-\tfrac{7}{2}c$

$$3aa-6ab+27ac$$

$$+5ab-\tfrac{7}{2}ac-10bb+52bc-\tfrac{63}{2}cc$$
$$+5ab \qquad -10bb+45bc$$

$$-\tfrac{7}{2}ac+7bc-\tfrac{63}{2}cc$$
$$-\tfrac{7}{2}ac+7bc-\tfrac{63}{2}cc$$

$$0$$

4) $\frac{a}{2}-1 \,|\, \tfrac{3}{2}aaa-\tfrac{5}{4}aa-8a+9 \,|\, 3aa+\tfrac{7}{2}a-9$

$$\tfrac{3}{2}aaa-3aa$$

$$+\tfrac{7}{4}aa-8a+9$$
$$+\tfrac{7}{4}aa-\tfrac{7}{2}a$$

$$-\tfrac{9}{2}a+9$$
$$-\tfrac{9}{2}a+9$$

$$0$$

5) $\frac{3ab}{2c}-\frac{5fm}{g}+7d \,\Big|\, \frac{9aabb}{4cc}-\frac{25ffmm}{gg}+\frac{70dfm}{g}-49dd \,\Big|\, \frac{3ab}{2c}+\frac{5fm}{g}-7d$

$$\frac{9aabb}{4cc}-\frac{15abfm}{2cg}+\frac{21abd}{2c}$$

$$+\frac{15abfm}{2cg}-\frac{21abd}{2c}-\frac{25ffmm}{gg}+\frac{70dfm}{g}-49dd$$
$$\frac{15abfm}{2cg} \qquad -\frac{25ffmm}{gg}+\frac{35dfm}{g}$$

$$-\frac{21abd}{2c}+\frac{35dfm}{g}-49dd$$
$$-\frac{21abd}{2c}+\frac{35dfm}{g}-49dd$$

$$0$$

Der Divisor geht übrigens nicht immer im Dividend auf; dann läßt sich ein Quotient angeben mit einem Rest.

Beispiele:

1) $a+b \mid a \;\lceil 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}$

$\frac{a+b}{-b}$

$-b-\frac{bb}{a}$

$+\frac{bb}{a}$

$+\frac{bb}{a}+\frac{bbb}{aa}$

$-\frac{bbb}{aa}$ u. s. f.

Also ist $\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} - \frac{aa}{a+b}$

2) $1-b \mid 1 \mid 1+b+bb$

$\frac{1-b}{+b}$

$\frac{b-bb}{+bb}$

$\frac{+bb-bbb}{+bbb}$ u. s. f.

$\frac{bbb}{}$

also $\frac{1}{1-b} = 1+b+bb+\frac{bbb}{1-b}$

z. B. ist $b = \frac{1}{2}$, so ist

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}$

3) $a-b \left\lceil \frac{a+b}{\frac{a-b}{2b}} \right| 1+\frac{2b}{a}+\frac{2bb}{aa}$

$+2b-\frac{2bb}{a}$

$+\frac{2bb}{a}-\frac{2bbb}{aa}$

$+\frac{2bbb}{aa}$ u. s. f.

$$\text{also ist } \frac{a+b}{a-b} = 1 + \frac{2b}{a} + \frac{2bb}{aa} + \frac{\frac{2bbb}{aa}}{a-b}$$

Zur Uebung.

1) $-\frac{5aa}{9} + \frac{11ab}{3} - \frac{10ac}{3} + \frac{15bb}{4} + 25bc$ div. durch $-\frac{2}{3}a + 5b$

$= \frac{5a}{6} + \frac{3b}{4} + 5c$

2) $\frac{5}{2}ab + \frac{85}{9}bb - \frac{223}{54}bc - \frac{10}{9}bd - \frac{3}{4}ac + \frac{7}{18}cc + \frac{cd}{3}$ div. durch

$\frac{3}{2}a + \frac{17}{3}b - \frac{7}{9}c - \frac{2}{3}d = \frac{5}{3}b - \frac{1}{2}c$

3) $\frac{15aa}{2} - \frac{113ab}{6} + 9ac + 2bb - bc$ div. durch $\frac{5a}{4} - 3b + \frac{3c}{2}$

$= 6a - \frac{2b}{3}$

4) $3aa - \frac{7}{2}ab - \frac{21}{4}ac - \frac{5}{2}bb + \frac{83}{8}bc - \frac{3}{2}cc$ div. durch $a + \frac{1}{2}b$

$-2c = 3a - 5b + \frac{3}{4}c$

5) $\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2xx + \ldots\ldots$

6) $\frac{aaaa - bbbb}{a-b} = ?$

§. 2.

Von den Decimalbrüchen.

157) Die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{9}{1000}$ . . . . haben die Eigenschaft, daß in jedem zur Rechten folgenden die Einheit $\frac{1}{10}$ ist von der Einheit des links vorhergehenden und umgekehrt, daß man von rechts nach links gehend bei jedem auf eine Einheit kommt, die das Zehnfache ist von der Einheit des nächst rechts stehenden. Offenbar reihen sie sich dadurch an die ganzen Zahlen selbst an, so daß z. B. in dem Ausdruck $345 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000}$ die Einheit in 3 das Zehnfache von der Einheit in 4, hier von der in 5, hier von der in 6, hier von der Einheit in 7 und in 7 von der Einheit in 9 ist. Bemerkt man sich also durch (,) hinter 5, daß sie Einer oder einfache Ganze bezeichnet, so kann man die darauf folgenden Stellen rechts den Zehenteln, Hunderteln, Tausendteln u. s. f.

einräumen, und also statt obiger Zusammenstellung schreiben: 345,679. Alle Brüche, deren Nenner aus der Multiplication von 10 entstanden (Zehnerbrüche oder Decimalbrüche), lassen sich nun auf diese Weise anschreiben, wenn man, im Falle keine Ganzen vorhanden sind, vor (,) 0 setzt. Z. B.

$\frac{6}{10} = 0{,}6$; $\frac{7}{100} = 0{,}07$; $\frac{9}{1000} = 0{,}009$

und man nennt wohl auch vorzugsweise so angeschriebene Zehnerbrüche Decimalbrüche.

158) Hieraus ergeben sich folgende zwei Regeln:

a) für das Anschreiben der Decimalbrüche:

Schreibe den Zähler des Bruches wie eine gemeine Zahl und schneide von rechts nach links so viel Decimalstellen ab, als der Nenner des Bruchs Nullen hat. Z. B.

$\frac{4}{10} = 0{,}4$; $\frac{27}{100} = 0{,}27$; $\frac{413}{1000} = 0{,}413$.

Zusatz 1. Sind nicht genug Stellen im Zähler vorhanden, so hänge man links so viel Nullen, als erforderlich ist, an.

Z. B. $\frac{17}{1000} = 0{,}017$; $\frac{9}{100000} = 0{,}00009$.

Zusatz 2. Zugleich sieht man, daß rechts an die Decimalstellen so viel Nullen angehängt werden dürfen, als man will, ohne daß sich der Werth des Bruches ändert. Z. B. 5,054 = 5,054000.

b) Regel für das Aussprechen angeschriebener Decimalbrüche:

Sprich die Ziffern, ohne Rücksicht auf das Komma, wie eine gemeine Zahl aus und benenne die Einheiten nach denen in der letzten Stelle rechts, oder gieb jener Zahl zum Nenner 1 mit so viel Nullen als Decimalstellen vorhanden sind.

Z. B. 0,027 sind 27 Tausendtel

0,3407 sind 3 tausend 4 hundert und 7 Zehntausendtel.

Zusatz 1. Die Ganzen kann man entweder allein angeben oder mit den Decimalstellen in der Benennung zusammen ziehen. Z. B.:

3, 5 = 3 Ganze und 5 Zehntel oder 35 Zehntel.
13, 07 = 13 Ganze und 7 Hundertel oder 1 tausend 3 hundert und 7 Hundertel.

159) Decimalbrüche werden addirt, wenn man die Zahlen in den gleichnamigen Stellen addirt; eben so wird einer von dem andern subtrahirt. Man erleichtert sich das Geschäft, wenn man sie mit den gleichnamigen Stellen untereinander setzt, und dann wie bei ganzen Zahlen verfährt.

a) Addition.

```
  5, 072
  0, 3456
 45, 78
  0, 3
104, 03
  0, 00005
-----------
155, 52765
```

Subtraction:

```
  5, 47896
  4, 98325
-----------
  0, 49571
```

```
  5, 7000
  0, 3876
-----------
  5, 3124
  5, 000
  1, 583
-----------
  3, 417
```

oder

```
  5, 7
  6, 3876
-----------
  5, 3124
     5
 1, 583
-----------
 3, 417
```

oder kürzer

160) Ein Decimalbruch wird mit einer Zahl ohne Nullen am Ende multiplicirt, wenn man ihn ohne Rücksicht auf das Komma wie eine ganze Zahl multiplicirt und in dem Product so viel Stellen von rechts nach links abschneidet, als der Bruch vorher hatte.

$$0,567 \cdot 8 = \frac{567}{1000} \cdot 8 \text{ (nach 158)} = \frac{567 \cdot 8}{1000} \text{ (nach 137 . 1)} \frac{4536}{1000} = 4,536$$

$$3,21 \cdot 12 = \frac{321}{100} \cdot 12 = \frac{321 \cdot 12}{100} = \frac{3852}{100} = 38,52$$

Also kürzer:

```
4,5768 . 314 = 1437,1152
     314
-----------
  183072
   45768
 137304
-----------
 14371152
```

```
5,0007 . 115 = 575,0805
   50007
  250035
-----------
 5750805
```

```
0,0034 . 13 = 0,0442
      13
-----------
     102
      34
-----------
     442
```

b) Ist der Multiplicator eine Zehnerzahl*), so braucht man blos das Komma um so viel Stellen nach rechts zu rükken, als sie Nullen hat. Z. B.:

5,6789 . 100 = 567,89
0,93457 . 1000 = 934,57
0,0071 . 10000 = 71
0,741 . 10000 = 7410
0,07 . 10000 = 700

Man kann dieß aus den Regeln des Bruchrechnens in Zeichen leicht so ableiten:

$$0{,}534 \cdot 100 = \frac{534}{1000} \cdot 100 = \frac{534}{10} \text{ (nach 137.1)} = 53{,}4 \text{ (nach 158)}$$

c) Ist der Multiplicator mehrzifferig und endigt er sich in Nullen, so kann man zuerst das Komma um so viel Stellen nach rechts rücken, und dann mit den werthvollen Ziffern wie in der ersten Regel multipliciren oder umgekehrt.

Z. B. 1) 9,45 . 50700 = 479115

```
  507
 6615
47250
------
479115
```

Es ist nämlich 9, 45 . 50700 = (9, 45 . 507) . 100 (nach 94) = 4791, 15 . 100 (nach 160, a) = 479115 (nach 161, b)

2) 0,4567 . 4000 = 1826,8

Beispiele:

1) 3,57 . 60 = 214,2
2) 579,8 . 1800 = 1043640
3) 0,5 . 36 = 18
4) 0,00563 . 17 = 0,09571

Anmerkung. Decimalbrüche unterscheiden sich von gemeinen Brüchen blos durch die Art, wie sie geschrieben werden und die Regeln der Decimalrechnung sind dieselben, wie die des Bruchrechnens, so verschieden sie auch lauten. So ist z. B. die Regel 160, a: multiplicire ohne Rücksicht auf das Komma und gieb dem Product so viel Stellen als der Bruch hatte, völlig gleichlautend mit der (137) gegebenen: multiplicire den Zähler des Bruches, und lasse den Nenner un-

*) Zehnerzahl soll jede durch Multiplication von 10 mit sich selbst erzeugte Zahl heißen, oder jede Zahl 1000....

geändert (d. h. dividire durch ihn). Denn wenn der Decimalbruch ohne Rücksicht auf das Komma multiplicirt wird, so multiplicirt man seinen Zähler; indem man diesem Product so viel Stellen giebt, als der Bruch hatte, dividirt man dasselbe durch den Nenner.

Die Regel 160, b, daß man blos das Komma nach rechts rücken solle, um den Bruch mit einer Zehnerzahl zu multipliciren, ist blos die frühere, daß ein Bruch multiplicirt wird, wenn man den Nenner dividirt, indem durch Rückung des Komma nach rechts dem Nenner des Decimalbruches dasselbe geschieht, als wenn im Nenner desselben Nullen abgeschnitten, er somit dividirt würde.

Die Regel 150, c enthält beide Regeln nach einander angewendet.

161) Ein Decimalbruch wird dividirt

a) mit einer gemeinen Zahl, ohne Nullen am Ende rechts, wenn man ihn ohne Rücksicht auf das Komma dividirt und dem Quotienten so viel Nullen giebt, als der Bruch hatte.

Beispiele und Erläuterung.

$$\frac{4{,}05}{9} = \frac{\frac{405}{100}}{9} \text{ (nach 158)} = \frac{\left(\frac{405}{9}\right)}{100} \text{ (nach 137. 2)} = \frac{45}{100}$$

$$= 0{,}45 \text{ (nach 158)}$$

$$\frac{0{,}58122}{18} = \frac{\frac{58122}{100000}}{18} = \frac{\frac{58122}{18}}{100000} = \frac{3229}{100000} = 0{,}03229$$

Kürzer: $\frac{4{,}05}{9} = 0{,}45$; $\frac{0{,}01765125}{375} = 0{,}00004707$

```
375 | 1765125 | 4707
    | 1500    |
    -------
      2651
      2625
      ----
        2625
        2625
        ----
           0
```

b) Mit einer Zehnerzahl wird ein Decimalbruch dividirt, wenn man das Komma um so viel Stellen nach links rückt, als die Zahl Nullen hat.

Beispiel und Erläuterung.

$$\frac{54,07}{10} = \frac{\frac{5407}{100}}{10} \text{ (nach 158)} = \frac{5407}{10.100} \text{ (nach 137, 2)} = \frac{5407}{1000}$$

$$= 5,407 \text{ (nach 158)}$$

$$\frac{587,1}{100} = 5,871; \quad \frac{0,076}{10} = 0,0076$$

$$\frac{1,052}{1000} = 0,001052; \frac{0,578}{10000} = 0,0000578$$

c) Hat die Zahl nur am Ende rechts Nullen, vorn andere Ziffern als 1, so rücke man zuerst das Komma nach links um so viel Stellen, als sie Nullen hat, und dividire dann mit dem Betrag der übrigen Ziffern, wie in a.

Beispiele:

$$\frac{0,567}{300} = \frac{\left(\frac{0,567}{100}\right)}{3} \text{ (nach 117)} = \frac{0,00567}{3} \text{ (nach 161, b)} =$$

$$0,00189 \text{ (nach 161, a)}$$

$$\frac{7583,2}{80000} = \frac{0,75832}{8} = 0,09479$$

Anmerk. Was in der Anmerkung zu (160) gesagt worden, läßt sich hier wiederholen.

Regel a läuft nämlich auf die frühere zurück; soll ein Bruch dividirt werden, so dividire den Zähler, und lasse den Nenner ungeändert, denn das Dividiren des Bruches ohne Rücksicht auf's Komma ist ein Dividiren des Zählers. Das Abschneiden so vieler Decimalstellen im Quotienten als der Bruch hatte, ist so viel als das Unterschreiben des Nenners.

Regel b aber läuft zurück auf die Regel von der Division eines Bruches durch eine Zahl, wornach man blos den Nenner multiplicirt und den Zähler unverändert läßt, denn das Rücken des Komma nach links ist ein Anhängen von Nullen an den Nenner des Decimalbruchs, somit ein Multipliciren desselben.

162) Bisher wurde vorausgesetzt, daß der Divisor im Dividenden aufgehe. Dieß ist zwar nicht immer der Fall; man kann aber doch durch folgendes Verfahren den Quotienten, so nahe man will, erhalten. Man denke sich nämlich dem

Bruche rechts Nullen angehängt und setze nun die Division fort, entweder bis sie aufgeht, oder bis man die erforderliche Genauigkeit im Quotienten hat; nur muß man im Quotienten so viel mehr Decimalstellen abschneiden, als man Nullen benützt hat.

Beisp.

$$\frac{0,95}{7} = 0,13\frac{4}{700}$$

$$\frac{0,950}{7} = 0,135\frac{5}{7000}$$

$$\frac{0,9500}{7} = 0,1357\frac{1}{70000}$$

$$\frac{0,95000}{7} = 0,13571\frac{3}{700000}$$

$$\frac{0,950000}{7} = 0,135714\frac{2}{7000000}$$

$$\frac{0,9500000}{7} = 0,1357142\frac{6}{70000000}$$

$$\frac{0,95000000}{7} = 0,13571428\frac{4}{700000000}$$

$$\frac{0,950000000}{7} = 0,135714285\frac{5}{7000000000}$$

u. s. w.

Man sieht hieraus, daß die Division nur dann durch Fortsetzung aufgehen kann, wenn der Divisor keine andern Factoren als 2 und 5 hat. Ist dieß, wie hier nicht der Fall, so nimmt sie kein Ende; jedoch lehrt die Vergleichung, daß jeder folgende Rest kleiner ist, als der vorhergehende, daß man dem wahren Werth des Quotienten sich im Decimalausdruck selbst desto mehr nähert, je weiter man die Division fortsetzt.

Beisp. $\frac{0{,}587}{19} = 0{,}0308947368421\ldots$

19 | 587 | 308947368421 ....
57

170
152

180
171

90
76

140
133

70
57

130
114

160
152

80
76

40
38

20
19

1

163) Beim Gebrauch solcher Decimalbrüche muß man die Reihe der Stellen irgendwo abbrechen und sich mit dem angenäherten Ausdruck begnügen. Dabei kann man aber, wenn die nächstfolgende Ziffer 5, 6 .... 9 ist, die letzte beibehaltene Ziffer um 1 erhöhen. Dadurch erhält man zwar den Werth des Decimalbruchs etwas zu groß, aber doch näher als ohne diese Erhöhung.

Z. B. für 0,0308947368421 . . . . schreibt man 0,0309, oder 0,030895, oder 0,0308947, oder 0,03089474 u. s. w.

164) Durch 161 und 162 hat man ein Mittel, jeden gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln. Man denke sich nämlich hinter dem Zähler ein Komma und Nullen angehängt, was man nach (158, a. Z. 2.) thun darf, so hat man einen Decimalbruch zu dividiren, wo denn, wenn die Di-

vision im oben angegebenen Falle aufgeht, der Bruch durch einen Decimalbruch von einer bestimmten Anzahl von Stellen sich ausdrücken läßt. Z. B.

$\frac{5}{8} = \frac{5{,}000}{8} = 0{,}625$

$\frac{15}{16} = 0{,}9375$, denn:

16	150	9375
	144	
	60	
	48	
	120	
	112	
	80	
	80	

Man dachte sich also $15 = 15{,}0000$ und dividirte diesen Decimalbruch durch 16.

$\frac{27}{125} = 0{,}216$, denn:

125	270	216
	250	
	200	
	125	
	750	
	750	

$\frac{25}{64} = 0{,}390625$

Geht die Division nicht auf, so hat man den wahren Werth des Bruches desto genauer, je mehr Decimalstellen man dem Bruch gegeben hat. Z. B.

$\frac{19}{1365} = 0{,}0139194139 \ldots\ldots$

$\frac{3}{35} = 0{,}0857142857 \ldots\ldots$

$\frac{2}{3} = 0{,}666 \ldots\ldots$

$\frac{3}{7} = 0{,}42857142 \ldots\ldots$

$\frac{95}{7} = 13{,}5714285 \ldots\ldots$

$\frac{17}{48} = 0{,}354166 \ldots\ldots$

$\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots\ldots$

165) Aus diesen Beispielen ersieht man, daß bei den Brüchen, welche sich nicht vollkommen genau in einem Decimalbruch ausdrücken lassen, dieselben Zahlen wiederkehren, und zwar entweder gleich vom Komma an, oder eine oder mehrere Stellen später.

Solche Decimalbrüche von unendlich vielen Stellen heißt man wiederkehrende oder periodische. Z. B.

$$\text{in } \frac{4}{11} = 0,\ 36\ 36\ 36 \ldots\ldots$$

ist die Periode (wiederkehrenden Stellen) zweizifferig, nämlich 36;

$$\text{in } \frac{9}{13} = 0{,}692307692307 \ldots\ldots$$

ist die Periode 6 zifferig nämlich 692307; in beiden Fällen fängt sie hinter dem Komma an. Dagegen in

$$\frac{17}{3000} = 0{,}0005666\ldots\ldots$$

ist sie einzifferig nämlich 6 und fängt erst in der 5ten Stelle an. Die Stellen vor der Periode mögen Vorziffern heißen.

166) Soll eine Zahl oder Größe überhaupt mit einem Decimalbruch dividirt werden, so kann dieß blos heißen, man soll angeben, wie oft der Decimalbruch in ihr enthalten sei. Nach (150) hat man mit dem Nenner die Größe zu multipliciren und darauf mit dem Zähler zu dividiren. Dieß geschieht auch hier, wenn man der Zahl so viel Nullen anhängt, als der Bruch Stellen hat, und darauf mit demselben ohne Rücksicht auf das Komma dividirt.

Z. B. $\frac{48}{0{,}16} = \frac{4800}{16} = 300$

$$\frac{72}{1{,}8} = \frac{720}{18} = 40$$

Geht die Division nicht auf, so setze man sie mittels Anhängung von Nullen fort, schneide aber im Quotienten so viel Stellen ab, als neue Nullen (außer den zuerst angehängten) benützt wurden. Z. B.:

$$\frac{4}{0{,}015} = \frac{4000}{15} = 266{,}66\ldots\ldots$$

Beisp. $\frac{215}{0{,}316} = 680{,}379\ldots\ldots$

316 | 215000 | 680379 .....
1896 |
2540
2528
1200
948
2520
2212
3080
2844
u. s. f.

$\frac{1}{0,24} = 4,1666\ldots\ldots$

$\frac{5640}{0,0015} = 3760000.$

$\frac{374}{2,4} = 155,8333\ldots\ldots$

$\frac{1}{3,2561047} = 0,30711543\ldots\ldots$

167) Soll man einen Decimalbruch mit einem andern multipliciren, so multiplicire man sie ohne Rücksicht auf die Kommate wie ganze Zahlen und gebe dem Product so viel Decimalstellen, als die Brüche zusammengenommen haben.

Beispiel und Erläuterung.

$5,1 \,.\, 1,79 = \frac{51}{10} \cdot \frac{179}{100}$ (nach 158) $= \frac{51 \,.\, 179}{10 \,.\, 100}$ (nach 146) $= \frac{9129}{1000}$

$= 9,129$ (nach 158).

$0,31 \,.\, 0,0005 = \frac{31}{100} \cdot \frac{5}{10000} = \frac{155}{1000000} = 0,000155$

$0,3 \,.\, 0,81 \,.\, 0,101 = \frac{3}{10} \cdot \frac{81}{100} \cdot \frac{101}{1000} = \frac{24543}{1000000} = 0,024543$

Anmerk. Auch diese Regel ist dieselbe, wie die (146) aufgestellte. Denn indem man die Decimalbrüche ohne Rücksicht auf die Kommate multiplicirt, multiplicirt man ihre Zähler und indem man im Product so viel Stellen abschneidet, als beide Brüche zusammen haben, multiplicirt man beide Nenner und macht sie zum Nenner des Products.

Zur Uebung:

$0,023 \,.\, 0,00373 = 0,00008579$

$0,007 \,.\, 139,9 = 0,9793$

0,011 . 1,3 . 7,3 = 0,10439
0,81 . 0,81 = 0,6561
9,4 . 0,094 = 0,8836
4,31 . 4,31 = 185,761
0,611 . 0,611 . 0,611 = 0,228099131
9,71 . 9,71 . 9,71 = 915,498611

168) Wird ein Decimalbruch durch einen andern dividirt, wo man, wie (151) bloß fragen kann, wie oft der eine in dem andern enthalten ist, so kommt es darauf an, ob Dividend und Divisor gleich viel Decimalstellen haben, oder nicht.

a) Haben sie gleich viel Decimalstellen, so dividire man ohne Rücksicht auf die Kommate wie bei ganzen Zahlen. Was heraus kommt, das sind ganze Male. Mittels Anhängung von Nullen wird die Division fortgesetzt; dann müssen aber so viel Stellen im Quotienten abgeschnitten werden, als man Nullen benützt hat.

Beispiele und Erläuterung.

$$\frac{5,7}{1,9} = \frac{\frac{57}{10}}{\frac{19}{10}} \text{ (nach 158)} = \frac{57}{19} \text{ (nach 151)} = 3$$

$$\frac{0,108}{0,018} = \frac{\frac{108}{1000}}{\frac{18}{1000}} = \frac{108}{18} = 6$$

$$\frac{0,56}{0,09} = \frac{56}{9} = 6,222\ldots$$

$$\frac{0,345}{0,015} = \frac{345}{15} = 23$$

Anmerk. Diese Regel, dividire ohne Rücksicht auf die Kommate, heißt bloß, dividire Zähler durch Zähler, wie in (151, Zus. 2.).

b) Hat der Dividend weniger Stellen, als der Divisor, so bringe man beide auf gleiche Benennung, indem man dem Dividenden so viel Nullen anhängt, als der Divisor mehr Stellen hat, und dividire wie bei a.

Beispiele.

$$\frac{4,74}{0,0006} = \frac{\frac{474}{100}}{\frac{6}{10000}} \text{ (nach 158)} = \frac{\frac{47400}{10000}}{\frac{6}{10000}} \text{ (nach 137, 3)} = \frac{47400}{6}$$

(nach 151. Z. 2) = 7900

$$\frac{57,6}{0,018} = \frac{57600}{18} = 3200$$

$$\frac{734,4}{0,72} = \frac{73440}{72} = 1020$$

Geht die Division nicht auf, so setzt man sie mittels Anhängung neuer Nullen fort, nur muß man alsdann so viel Decimalstellen im Quotienten abschneiden, als man neue Nullen benützt hat.

Z. B. $\frac{4,5}{0,007} = \frac{4500}{7} = 642,857142\ldots$

$$\frac{145,817}{0,0563} = 2590$$

$$\frac{0,5}{76,191342} = 0,0065624\ldots$$

$$\frac{0,046}{0,00762089} = 6,0360404\ldots$$

c) Hat der Divisor weniger Decimalstellen, so könnte man ihn durch Anhängung von Nullen mit dem Dividenden gleichbenennen und dann wie in b) verfahren.

Z. B. $\frac{4,7802}{0,3} = \frac{47802}{3000} = 15,934$

Bequemer aber dividirt man ohne Rücksicht auf die Kommate und gibt dem Quotienten so viel Decimalstellen, als der Dividend deren mehr hatte, als der Divisor, wo man denn, wenn es nöthig ist, die Decimalstellen des Dividenden durch angehängte Nullen beliebig vermehren kann.

Z. B. $\frac{0,6585}{1,5} = 0,439$ Denn:

$$\frac{0,6585}{1,5} = \frac{\frac{6585}{10000}}{\frac{15}{10}} \text{ (nach 158)} = \frac{6585 \cdot 10}{15 \cdot 10000} \text{ (nach 151)} =$$

$$\frac{\frac{6585}{15}}{1000} \text{ (nach 117)} = \frac{439}{1000} = 0,439$$

Beispiele zur Uebung.

1) $\frac{0,2956}{1,478} = 0,2$

2) $\frac{4,86927}{1,4103} = 0,9$

3) $\frac{3,52736826}{1,405326} = 2,51$

4) $\frac{2,421045}{1,2045} = 2,01$

5) $\frac{8,24967}{5,769} = 1,43$

6) $\frac{4,2742995}{0,4569} = 9,355$

7) $\frac{0,00057694}{0,0001} = 5,7694$ 8) $\frac{0,6214806}{0,18} = 3,45267$

9) $\frac{15,713}{18,13} = 0,86668505\ldots$ 10) $\frac{137,51634}{27,65} = 4,97346\ldots$

169) Wie man einen Decimalbruch von endlicher Anzahl von Stellen in einen gemeinen Bruch verwandelt, sieht man aus (158, b). Es ist nämlich z. B.

$$0,745 = \frac{745}{1000} = \frac{149}{200}$$

Hat aber der Decimalbruch unendlich viel Decimalstellen, so läßt er sich nur dann auf einen gemeinen Bruch zurückführen, wenn er wiederkehrend ist.

Man unterscheide dabei die zwei Fälle:

a) wenn die wiederkehrenden Ziffern gleich hinter dem Komma anfangen, so multiplicire den Decimalbruch mit einer solchen Zehnerzahl, daß die ersten wiederkehrenden Stellen Ganze werden; ziehe davon den Decimalbruch ab: so fallen im Rest alle Decimalstellen weg, und man hat eine Zahl, die einem Vielfachen des Decimalbruchs gleich ist. Dieser ist also ein Theil der Zahl.

Beispiel: $0,4545\ldots = \frac{5}{11}$

$100 \,.\, 0,4545\ldots = 45,4545\ldots$

abgezogen $1 \,.\, 0,4545\ldots = 0,4545\ldots$

bleibt $99 \,.\, 0,4545\ldots = 45$

also $0,4545 = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

b) Fangen die wiederkehrenden Ziffern in spätern Stellen an, so multiplicire zuerst mit einer solchen Zehnerzahl, daß die Ziffern vor der Periode sammt dieser Ganze werden, sodann mit einer andern, wodurch die Ziffern vor der Periode Ganze werden; ziehe letzteres Produkt von ersterem ab, so bleibt eine ganze Zahl gleich dem Decimalbruch mehrmal genommen: also ist der Decimalbruch selbst die Zahl dividirt durch diesen Factor.

Beispiel: $0,123151515\ldots = \frac{508}{4125}$. Denn

$100000 \,.\, 0,1231515\ldots = 12315,1515\ldots$

davon: $1000 \,.\, 0,1231515\ldots = 123,1515\ldots$

bleibt $99000 \,.\, 0,1231515\ldots = 12192$

also $0,1231515 = \frac{12192}{99000}$ (nach 137, 3) $= \frac{1016}{8250}$

(nach 137, 3) $= \frac{508}{4125}$

Sind Ganze dabei, so macht dieß keine Verschiedenheit des Verfahrens nöthig. Z. B.

$$5,111\ldots = \tfrac{46}{9} = 5\tfrac{1}{9}$$
$$10\,.\,5,11\ldots = 51,11\ldots$$
$$\underline{1\,.\,5,11\ldots = 5,11\ldots}$$
$$9\,.\,5,11\ldots = 46$$
$$5,11\ldots = \tfrac{46}{9}$$

170) Bei der Multiplication und Division eines Decimalbruchs durch einen andern bedient man sich häufig folgender Abkürzung.

a) Meist ist im Product die ganze Anzahl der Decimalstellen (da ihrer so viel werden, als die Factoren zusammengenommen haben) gar nicht brauchbar, und schon die ersten geben die erforderliche Genauigkeit; oft kann man auch wirklich nur die ersten Decimalstellen genau erhalten, wenn nämlich der eine oder beide Factoren unendlich viel Decimalstellen haben.

Z. B. 4,57389 . 0,178963

457389	Multiplicand.	457389
178963	Multiplicator.	178963
1372167		0,457389
2744334		320172
4116501		36591
3659112		4116
3201723		274
457389		13
0,81855707607		0,818555

Hat man nun hier das Product nur auf 5 werthvolle Ziffern nöthig, so sieht man, daß alle einzelnen Producte, welche auf 707607 Einfluß haben, nicht weiter beachtet zu werden brauchen. Betrachtet man dagegen die Theilproducte, von denen 81855 abhängen, so erzeugen sie sich nach folgender Regel, wie auch das neben beigesetzte Beispiel der abgekürzten Rechnung zeigt:

Multiplicire mit der ersten werthvollen Ziffer (nicht 0) des Multiplicators den ganzen Multiplicanden von rechts nach links und schneide die Ganzen von den Decimalstellen ab; mit der zweiten links folgenden Ziffer des Multiplicators multiplicire den ganzen Multiplicandus von der zweiten rechts

folgenden Ziffer an, so daß man die vom Producte der rechtsstehenden Ziffer gebliebenen Einheiten dazu nimmt; eben so multiplicire man mit der dritten Stelle links des Multiplicators den Multiplicanden von der dritten Stelle rechts anfangend, mit Hinzufügung der von dem Product der vorletzten Stelle gebliebenen Einheiten: und so fahre fort. Diese Producte addirt, geben das Product bis zur letzten der gefundenen Stellen rechts richtig.

Haben einer oder beide Decimalbrüche unendlich viele oder doch mehr Stellen, als das Product erfordert, so nimmt man von jedem eine Stelle mehr, als das abgekürzte Product haben soll.

Z. B. 2, 30258509 . 3,9600901 sey auf 3 Decimalstellen zu finden; so hat man, weil hier 3,9600 bloß die werthvollen Ziffern 396 hat:

```
23025
  396
-----
69077
20722
 1380
-----
9,1179
```

Nimmt man nun statt 9 in der letzten Stelle (nach 163) 1 mehr in der nächsten Stelle links an, so ist 9, 118 das auf 3 Decimalstellen richtige Product.

b) Auch für die Division läßt sich eine ähnliche Abkürzung anbringen. Man dividirt nämlich zuerst mit dem ganzen Divisor, dann mit demselben nach Weglassung der letzten Stelle rechts, darauf nach Weglassung der zwei letzten Stellen u. s. f. Beispiel:

```
0,73491 | 0,093476 | 0, 1271   = oder
          73491 |
          -----
          199850
          146982
          ------
          528680
          514437
          ------
          142480
           73491
           -----
           68939
u. s. f.
```

```
0,73491 | 0,093476 | 0, 1271
          73491 |
          -----
          19985
          14698
          -----
           5287
           5138
           ----
            149
            146
            ---
              3
```

171) Decimalbrüche können wie andere Zahlzeichen untereinander, und mit Buchstaben verbunden, vorkommen. So wird es nicht schwierig seyn, folgende Umformungen zu verstehen.

1) $\dfrac{\frac{6,705}{25} \cdot \frac{3,407}{4}}{9} = \dfrac{6,705 \cdot 3,407}{900} = \dfrac{0,745 \cdot 3,407}{100} = \dfrac{2,538215}{100}$
$= 0,02538215$

2) $\dfrac{\left(\frac{4,5}{18}\right)}{\left(\frac{9,5}{19}\right)} = \dfrac{\frac{0,5}{2}}{0,5} = \dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{7,587}{3,402} = \dfrac{0,843}{0,378} = \dfrac{281}{126} = 2\frac{29}{126}$

4) $\dfrac{5,7171\ldots}{1,3535\ldots} = \dfrac{566}{134} = \dfrac{283}{67} = 4\frac{15}{67}$ (nach 169).

5) $\dfrac{15,07510751\ldots}{3,12020202\ldots} = \dfrac{\frac{150736}{9999}}{\frac{3080}{990}} = \dfrac{150736 \cdot 10}{101 \cdot 3089} = \dfrac{1507360}{311989}$

6) $(5m + 0,5p)(12,3m + 4,3212n) = 61,5mm + 21,606mn + 6,15mp + 2,1606np$

7) $(5,6m + 8,9n + 3,4p)(2,1m - 0,1n) = 11,76mm + 18,13mn + 7,14mp - 0,89nn - 0,34np$

8) $(3 - 2,7p + 4,26q)(2,121p - 3,1224q) = 6,363p - 5,7267pp + 17,46594pq - 9,3672q - 13,301424qq$

9) $(5 - 2,01a)(5 + 2,01a) = 25 - 4,0401a$

10) $(1 - 0,001a)(1 - 0,001a) = 1 - 0,002a + 0,000001a$

11) $\dfrac{0,0707112rt}{2,35704r} = 0,03t$

12) $\dfrac{-2,8 + 0,7q}{-0,7} = 4 - q$

13) $\dfrac{-41,2717704lm + 26,060175024ln}{-8,670541} = 4,76m - 3,0056n$

14) $\dfrac{0,16yy - 4,8yz + 36zz}{0,4y - 6z} = 0,4y - 6z$

15) $\dfrac{-1,2de - 3df + 0,8e + 2f}{0,4e + f} = 2 - 3d$

16) $\dfrac{0,4356ab}{413,9432c} = 0,0010523 \cdot \dfrac{ab}{c}$

17) $\dfrac{1 + a}{2d} = \dfrac{0,5 + 0,5a}{d}$

18) $\frac{3f - 7g}{4h} = \frac{0,75f - 1,75g}{h}$

19) $\frac{347m}{1201n} = (0,2889258 \ldots) \frac{m}{n}$.

§. 3.

Ueber Ketten- und Näherungsbrüche.

172) Dividirt man in einem ächten Bruche den Zähler und Nenner durch den Zähler, und erhält dadurch der Nenner außer Ganzen noch einen Bruch, in dem man abermals so verfährt, bis endlich ein Bruch bleibt, dessen Zähler 1 ist, so erhält man die eigenthümliche Form, die man einen Kettenbruch heißt.

Beispiel.

$\frac{117}{256} = \frac{1}{2 + \frac{22}{117}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{7}{22}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}}}$, was man gewöhnlich so bezeichnet:

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{7}}}}$$

173) Man sieht leicht, daß man hier dieselbe Rechnung ausführt, die oben zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen angewendet wurde. Nämlich:

117	256	2
	234	
22	117	5
	110	
7	22	3
	21	
1	7	7
	7	
	0	

und daß die Zahlen des Kettenbruches bloß die Quotienten sind, die man hier erhält. Man kann also, wenn erst diese Rechnung gemacht ist, jeden Bruch leicht in einen Kettenbruch verwandeln. Z. B. $\frac{3271}{4568}$

$$\begin{array}{r|r|l} 3271 & 4568 & 1 \\ & 3271 & \\ \hline 1297 & 3271 & 2 \\ & 2594 & \\ \hline 677 & 1297 & 1 \\ & 677 & \\ \hline 620 & 677 & 1 \\ & 620 & \\ \hline 57 & 620 & 10 \\ & 57 & \\ \hline 50 & 57 & 1 \\ & 50 & \\ \hline 7 & 50 & 7 \\ & 49 & \\ \hline 1 & 7 & 7 \\ & 7 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

daher $\dfrac{3271}{4568} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{7}}}}}}}}$

173. b) Umgekehrt sieht man aus der Beschaffenheit des Kettenbruches leicht, wie er sich auf einen einfachen Bruch zurückführen läßt. Z. B.

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{7+\frac{1}{7}}}}}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10+\dfrac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{7}}}}}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{7}{7}}}}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{7}{7}}}}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{7}{7}}}}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{7}{7}}}}}}} = \frac{3271}{4568}$$

174) Entwickelt man einen Bruch zu einem Kettenbruch, und läßt man jedesmal den (im folgenden Beispiel eingeklammerten) Bruch im letzten Nenner weg, so erhält man abwechselnd kleinere und größere Brüche, als der gegebene, die sich ihm aber immer mehr nähern, und von welchen jeder in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

Z. B. Für $\frac{3}{4}\frac{2}{5}\frac{7}{6}\frac{1}{8}$ gibt $\cfrac{1}{1+(\frac{1}{3}\frac{2}{2}\frac{9}{1}\frac{7}{1})}$ den zu großen Werth $\frac{1}{x}$

$\cfrac{1}{1+1} = \frac{2}{3}$, welcher zu klein.

$\cfrac{1}{2+(\frac{6}{1}\frac{7}{2}\frac{7}{9})}$

$\cfrac{1}{1+1} = \frac{3}{4}$, welcher zu groß.

$\cfrac{1}{2+1}$

$\cfrac{1}{1+(\frac{6}{6}\frac{2}{7}\frac{0}{7})}$

$\cfrac{1}{1+1} = \frac{5}{7}$, welcher zu klein.

$\cfrac{1}{2+1}$

$\cfrac{1}{1+1}$

$\cfrac{1}{1+(\frac{5}{6}\frac{7}{1}\frac{0}{0})}$

$\cfrac{1}{1+1} = \frac{53}{74}$, welcher zu groß.

$\cfrac{1}{2+1}$

$\cfrac{1}{1+1}$

$\cfrac{1}{1+1}$

$\cfrac{1}{10+(\frac{5}{5}\frac{0}{7})}$

$\cfrac{1}{1+1} = \frac{58}{81}$, welcher zu klein.

$\cfrac{1}{2+1}$

$\cfrac{1}{1+1}$

$\cfrac{1}{10+1}$

$\cfrac{1}{1+(\frac{7}{5}\frac{0}{0})}$

$\cfrac{1}{1+1} = \frac{459}{641}$, welcher zu groß.

$\cfrac{1}{2+1}$

$\cfrac{1}{1+1}$

$\cfrac{1}{1+1}$

$\cfrac{1}{10+1}$

$\cfrac{1}{7+(\frac{1}{7})}$

Endlich der Werth des Bruches selbst $= \frac{3}{4}\frac{2}{5}\frac{7}{6}\frac{1}{8}$

175) Diese Näherungswerthe des Bruches $\frac{3}{4}\frac{2}{5}\frac{7}{6}\frac{1}{8}$ kann man aber leichter nach folgender, aus der Berechnung der Kettenbrüche abgeleiteten Regel berechnen.

Schreibe die Quotienten, welche sich beim Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Theilers ergeben, neben einander, ziehe einen wagrechten Strich, schreibe unter den letzten 1, 0 und darunter 0, 1. Multiplicire darauf jeden Quotienten mit der unten stehenden Zahl in beiden angefangenen Reihen und addire zum Produkt die nächstvorhergehende Zahl derselben Reihe, so geben diese beiden Zahlreihen die Zähler und Nenner der gesuchten Näherungsbrüche. Z. B.

	1	2	1	1	10	1	7	7	
1	0	1	2	3	5	53	58	459	3171
0	1	1	3	4	7	74	81	641	4568

Gegen den gegebenen Bruch ordnen sie sich aber so:

$$\frac{1}{1} > \frac{3}{4} > \frac{53}{74} > \frac{459}{641} > \frac{3171}{4568} > \frac{58}{81} > \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$$

Aufgabe. Wenn der Durchmesser 10000000 Theile hat, so hat der Kreisumfang 31415926 derselben Theile, oder der Durchmesser ist $\frac{10000000}{31415926}$ des Umfangs. Hier würden die Näherungswerthe seyn: $\frac{1}{3}$ $\frac{7}{22}$ $\frac{106}{333}$ $\frac{113}{355}$ u. s. w. Z. B.

1) $\frac{5065}{13891}, \frac{369}{1012}, \frac{268}{735}, \frac{101}{277}, \frac{66}{181}, \frac{35}{96}, \frac{31}{85}, \frac{4}{11}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

2) $\frac{2578}{8327}, \frac{413}{1334}, \frac{100}{323}, \frac{13}{42}, \frac{9}{29}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}$

Es läßt sich beweisen, daß es keine Brüche gibt, die, mit kleinern Zahlen geschrieben, dem Werth des gegebenen näher kommen.

Unter sich sind die zunächst aufeinander folgenden Brüche immer um einen Bruch verschieden, dessen Zähler 1, dessen Nenner ein Produkt der beiden Nenner der aufeinander folgenden Brüche ist. Z. B. $\frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$.

Siebenter Abschnitt.

Ueberblick der Multiplikation und Division.

176) Läßt man im Folgenden die Buchstaben bloß reine Zahlen bedeuten und nimmt man Formen wie, a—b, $\frac{a}{b}$ auch dann noch als brauchbar, wenn $a < b$ ist, obgleich sie alsdann an sich selbst keine denkbare Bedeutung haben, oder kein faßliches Resultat liefern (154), sondern erst in Verbindung

mit andern Ausdrücken und in Anwendung auf bestimmte Größen ein ausführbares Verfahren angeben, so lassen sich die in den Abschnitten III bis VI. abgeleiteten Regeln, wie oben bei der Addition geschehen ist, in eine Tafel von Gleichungen zusammenstellen.

Bedenkt man nämlich, daß bei der Multiplikation und Division einfache Zahl, Summe, Unterschied, Product, Quotient durch Multiplikation und Division, letztere auch noch durch Addition und Subtraktion verbunden vorkommen können, so erhält man zunächst folgende Formen der Verbindung:

$a(m+n)$ $\frac{a}{m+n}$ $\frac{m+n}{a}$

$a(m-n)$ $\frac{a}{m-n}$ $\frac{m-n}{a}$

$a \cdot (b \cdot c)$ $\frac{a}{b \cdot c}$ $\frac{b \cdot c}{a}$ $a+bc$ $a-bc$ $bc-a$

$a \cdot \frac{b}{c}$ $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$ $\frac{\frac{b}{c}}{a}$ $a+\frac{b}{b}$ $a-\frac{b}{c}$ $\frac{b}{c}-a$

$(a+b) \cdot (c+d)$ $\frac{a+b}{c+d}$

$(a+b) \cdot (c-d)$ $\frac{a+b}{c-d}$ $\frac{a-b}{c+d}$

$(a+b) \cdot (c \cdot d)$ $\frac{a+b}{cd}$ $\frac{cd}{a+b}$ $(a+b)+(cd)$ $(a+b)-cd$ $cd-(a+b)$

$(a+b) \cdot \frac{c}{d}$ $\frac{a+b}{c}$ $\frac{\frac{c}{d}}{a+b}$ $(a+b)+\frac{c}{d}$ $(a+b)-\frac{c}{d}$ $\frac{c}{d}-(a+b)$

$(a-b) \cdot (c-d)$ $\frac{a-b}{c-d}$

$(a-b) \cdot cd$ $\frac{a-b}{cd}$ $\frac{cd}{a-b}$ $(a-b)+cd$ $(a-b)-cd$ $cd-(a-b)$

$(a-b) \cdot \frac{c}{d}$ $\frac{a-b}{\left(\frac{c}{d}\right)}$ $\frac{\frac{c}{d}}{a-b}$ $(a-b)+\frac{c}{d}$ $(a-b)-\frac{c}{d}$ $\frac{c}{d}-(a-b)$

$ab \cdot cd$ $\frac{ab}{cd}$ $ab+cd$ $ab-cd$

$ab \cdot \frac{c}{d}$ $\frac{ab}{\left(\frac{c}{d}\right)}$ $\frac{\frac{c}{d}}{ab}$ $\frac{c}{d}+ab$ $\frac{c}{d}-ab$ $ab-\frac{c}{d}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$

177) Für die Umänderung jeder einzelnen dieser Formen ist in den Abschnitt III. bis VI. die erforderliche Erläuterung gegeben, und wir heben hier nur die wichtigsten Gleichungen heraus, die sich daraus ergeben. Der Anfänger wird wohl thun, alle Formen auf diese Art durchzugehen, die herausgehobenen Gleichungen in den frühern Sätzen aufzusuchen und in wörtliche Sätze zu übersetzen, deren die meisten zwei geben.

Da bei der Vergleichung der im II. Abschnitt für die Addition und Subtraction aufgeführten allgemeinen Lehrsätze mit der hier für die Multiplication und Division sich ergebenden ein interessanter Parallelismus hervortritt, so sind neben die Lehrsätze der Multiplication und Division die correspondirenden Sätze der Addition und Subtraction geschrieben. Verwechselt man in den wörtlichen Ausdrücken Multipliciren, Dividiren, Product, Quotient, Factor, Dividend, Divisor mit Addiren, Subtrahiren, Summe, Differenz, Summand, Minuend, Subtrahend, so lassen sich die Sätze der Multiplication in Sätze der Addition verwandeln.

$\frac{a \cdot m}{m} = a$ $\qquad$ $(a+b) - b = a$

$\frac{a}{m} \cdot m = a$ $\qquad$ $(a-b) + b = a$

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ $\qquad$ $a + (b+c) = a+b+c$

$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$ $\qquad$ $(a+b) - c = (a-c) + b$

$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a \cdot c}{b}$ $\qquad$ $a - (b-c) = (a+e) - (b-c)$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$ $\qquad$ $(a-b) - c = a - (b+c)$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\frac{a}{c}}{b}$ $\qquad$ $(a-b) - c = (a-c) - b$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\qquad$ $(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d)$

$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ $\qquad$ $(a-b) = (a+m) - (b+m)$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $\qquad$ $(a-b) - (c-d) = (a+d) - (b+c)$

Besondere Lehrsätze der Multiplication und Division sind dann folgende:

$$a(c \pm d) = ac \pm ad$$

$$(a \pm b).(c \pm d) = ac \pm ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b+a} = ?$$

$$ab \pm cd = ?$$

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

$$a \pm bc = ?$$

$$a \pm ac = (1 \pm c).a$$

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

u. s. f.

Anmerkung. Für die Vergleichung der Multiplication und Division stehe hier nur ein Beispiel:

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}, \quad a - (b - c) = (a + c) - b$$

1) Soll eine Zahl durch einen Quotienten dividirt werden, so multiplicire man sie mit dem Divisor und dividire das Product durch den Dividenden.

2) Soll von einer Zahl ein Unterschied abgezogen werden, so addire man zu ihr den Subtrahenden und ziehe den Minuenden von der Summe ab.

Achter Abschnitt.

Rechnung mit benannten Zahlen.

178) Wenn eine Zahl als Einheit eine bestimmte Größe oder ein bestimmtes Ding hat, so heißt sie einfach benannt

und dann ist schon oben überall an den gehörigen Orten bemerkt, was bei der Rechnung zu beobachten ist.

Wenn aber von der Rechnung mit benannten Zahlen im engern Sinne die Rede ist, so versteht man darunter solche Größen, welche durch höhere und niedrigere Einheiten derselben Art ausgedrückt sind. Z. B. die Menge Silber, die man durch 5 fl. 27 kr. ausdrückt, ist eine ungleich oder zusammengesetzt benannte Zahl.

Man hat für das leichtere Auffassen der Größen bestimmte Einheiten derselben angenommen und besonders benannt.

Z. B. 1 Fuß = 10 Zoll oder auch = 12 Zoll.
1 Zoll = 10 Linien oder = 12 Linien.
1 Pfund = 32 Loth.
1 Loth = 4 Quint u. s. f.

Die Kenntniß der Eintheilung der wichtigsten Maße, Gewichte, Münzen muß hier vorausgesetzt werden.

179) Eine ungleich benannte Zahl gleich zu benennen.

a) indem man die höhern Einheiten auf niedrigere bringt.

Regel. Multiplicire die Anzahl der höhern Einheiten mit der Zahl, die angibt, wie viel niedrigere auf eine höhere gehen.

Beisp. 17 Pfund = 17 . 32 Loth = 544 Loth.
13 Loth = 13 . 4 Quint = 52 Qt.
41 fl. = 41 . 60 kr. = 2460 kr.
7 Stunden = 7 . 60 Minuten = 420 Min.

210 fl. 3 kr. 3 h. = 50415 h.

60
12603
4
50415

72 lb. 19 L. 2 Qt. = 9294 Qt.

32
144
216
19
2323
4
9294

Besonders leicht ist dieß Verfahren, wenn die Abtheilungen der Größen nach 10, 100 oder 1000 gemacht sind. Z. B. Wenn ein Fuß = 10 Zoll, 1 Zoll = 10 Linien, so ist

15 Fuß 7 Zoll 3 Lin. oder $15' 7'' 3''' = 1573'''$.

Ist 1 Quadratfuß = 100 Quadratzoll, 1 Q. Zoll = 100 Q. Linien, so ist

□′	□″	□‴		□‴
75	31	27	=	753127

□′	□‴		□‴.
27	13	=	270013

Ist 1 Cubikfuß = 1000 Cub. Zoll, ein Cub. Zoll = 1000 Cub. Lin., so sind

c′	c″	c‴		c‴
793	321	175	=	793321175

c′	c″	c‴		c‴
721	15	4	=	721015004

c′	c″	c‴		c‴
700	500	10	=	700500010

c′		c‴		c‴
1	—	7	=	1000007

b) indem man die kleinern Einheiten in größere zusammenfaßt oder als Brüche der größern ausdrückt.

Regel. Dividire die Anzahl der kleinern Einheiten durch die Zahl, welche angibt, wie viel kleinere Einheiten auf eine größere gehen.

Beispiele:

1) $379500 \text{ kr.} = \frac{379500}{60} \text{ fl.} = 6325 \text{ fl.}$

$371 \text{ kr.} = \frac{371}{60} = 6\frac{11}{60} \text{ fl.} = 6 \text{ fl. } 11 \text{ kr.}$

$7345 \text{ ß.} = \frac{7345}{4} \text{ kr.} = 1836 \text{ kr. } 1 \text{ ß.}$

$= \frac{1836}{60} \text{ fl. } 1 \text{ ß.} = 30 \text{ fl. } 36 \text{ kr. } 1 \text{ ß.}$

oder in Brüchen $= 1836\frac{1}{4} \text{ kr.} = 30\frac{145}{240} \text{ fl.}$

2) $34564 \text{ Qt.} = \frac{34564}{4} \text{ Loth} = \frac{34564}{4.32} \text{ ℔.}$

$= 8641 \text{ Loth} = \frac{8641}{32} \text{ ℔.} = 270 \text{ ℔. } 1 \text{ Loth.}$

$= 270\frac{1}{2} \text{ ℔.}$

3) 69449230 Secunden $= \frac{69449230}{60}$ Minuten

$= \frac{69449230}{60.60}$ Stunden $= \frac{69449230}{60.60.24}$ Tage

$= 1157487$ Min. 10 Sec. $= \frac{1157487}{60}$ Stund. 10 Sec.

$= 19291$ Std. 27 Min. 10 Sec. $= \frac{19291}{24}$ Tag 27 M. 10 S.

$= 803$ Tage 19 Std. 27 Min. 10 Sec.

oder in Brüchen

$= 803$ Tage 10 Std. $27\frac{10}{60}$ Min.

$= 803$ Tage $19\frac{1630}{3600}$ Std.

$= 803\frac{7003}{8640}$ Tage.

Bei zehntheiligen Einheiten ist die Division nur mit 10, 100, 1000 vorzunehmen, geschieht also bloß durch das Abschneiden von Decimalstellen nach (161, b).

Beisp. $375893''' = 73589{,}3'' = 7358{,}93'$

$\square'''$ $\square''$ $\square'$

$58479 = 584{,}79 = 5{,}8479$

oder im ersten Fall

7358 Fuß 9 Zoll 3 Lin.,

im andern 5 □ F. 84 □ Z. 79 □ L.

Eben so ist

c''' c'' c'

$934587003 = 934587{,}003 = 934{,}587003$

oder 934 C Fuß 587 C Zoll 3 C Lin.

Ueberhaupt wird also bei der zehntheiligen Eintheilung durch ein Verrücken des Kommas nach links eine Verwandlung in größere, nach rechts in kleinere Einheiten angedeutet.

Z. B. 73458,1 Lin. = 7345,85 Fuß

30040,01 □ Lin. = 300,4001 □ Zoll

oder 27,40051 □ Fuß. = 274005,1 □ Lin.

39,000400567 C Fuß = 39000,400567 C Z.

= 39000,400567 C Lin.

180) Beide Regeln gelten eben so wohl von Ganzen, als von beliebigen Brüchen der benannten Einheiten. Z. B.

a) aus größern in kleinere Einheiten.

1) $\frac{5}{8}$ fl. $= \frac{5 \cdot 60}{8}$ kr. $= \frac{5 \cdot 60 \cdot 4}{8}$ ₰.

$= 37\frac{1}{2}$ kr. $= 150$ ₰.

2) $\frac{3}{4}$ ℔. $= \frac{3 \cdot 32}{4}$ Loth $= \frac{3 \cdot 32 \cdot 4}{4}$ Dt.

$= 24$ Loth $= 96$ Dt.

3) $\frac{5}{12}$ Thlr. $= \frac{5 \cdot 24}{12}$ Gr. $= \frac{5 \cdot 24 \cdot 12}{12}$ ₰.

$= 10$ Gr. $= 120$ ₰.

4) $3\frac{3}{5}$ fl. $= 3\frac{3}{5} \cdot 60$ kr. $= \frac{18 \cdot 60}{5}$ kr. $= 216$ kr.

5) $5\frac{2}{3}$ fl. $= 5\frac{2}{3} \cdot 60$ kr. $= \frac{17 \cdot 60}{3}$ kr. $= 340$ kr.

6) $\frac{7}{20}$ fl. $= \frac{7 \cdot 24}{20}$ ₰. $= 84$ ₰.

7) $\frac{11}{120}$ fl. $= \frac{11 \cdot 240}{120}$ ₰. $= 22$ ₰.

8) $\frac{1}{17}$ fl. $= \frac{60}{17}$ kr. $= 3\frac{9}{17}$ kr. $= 3\frac{9}{17} \cdot 4$ ₰. $= 14\frac{2}{17}$ ₰.

9) 0,576 Frank = 57,6 Centimes

10) 0,345 Quadratfuß =

34,5 Qdr. Zoll = 3450 Qdr. Lin.

11) $61345{,}9^{c'''} = 61{,}3459^{c''} = 0{,}0613459^{c'}$

b) aus kleinern in größere Einheiten:

1) $\frac{7}{8}$ ₰. $= \frac{7}{8 \cdot 4}$ kr. $= \frac{7}{32}$ kr. $= \frac{7}{32 \cdot 60}$ fl. $= \frac{7}{1920}$

2) $\frac{15}{16}$ kr. $= \frac{15}{16 \cdot 60}$ fl. $= \frac{1}{64}$ fl.

3) $\frac{30}{23}$ kr. $= \frac{30}{23 \cdot 60}$ fl. $= \frac{1}{46}$ fl.

4) $\frac{5}{8}$ Dt. $= \frac{5}{32}$ Loth $= \frac{5}{32 \cdot 32}$ ℔. $= \frac{5}{1024}$ ℔.

5) $5\frac{1}{2}$ Groſch. $= \frac{5\frac{1}{2}}{24}$ Thlr. $= \frac{1}{48}$ Thlr.

6) $3\frac{3}{4}$ ₰. $= \frac{3\frac{3}{4}}{12}$ Groſch. $= \frac{15}{4 \cdot 12}$ Gr. $= \frac{5}{16}$ Gr.

$= \frac{5}{10 \cdot 24}$ Thlr. $= \frac{5}{384}$ Thlr.

7) $3\frac{7}{8}$ Zoll $= \frac{3\frac{7}{8}}{12}$ Fuß $= \frac{31}{96}$ Fuß

8) $15\frac{1}{2}$ □ Lin. $= \frac{15\frac{1}{2}}{144}$ □ Zoll $= \frac{31}{288}$ □ Zoll

9) $9{,}3''' = 0{,}93'' = 0{,}093'$

10) $0{,}7\,\square'' = 0{,}007\,\square'$

11) $0{,}07\,c''' = 0{,}00007\,c''$

12) $0{,}09 = 0{,}00009$

13) $0{,}2''' = 0{,}002'$

14) $7{,}3\,\square''' = 0{,}073\,\square'' = 0{,}00073\,\square'$

181) Zusammengesetzt oder ungleichbenannte Zahlen zu addiren.

Regel. Setze die gleichbenannten Zahlen untereinander, addire die Zahlen in jeder Stelle von der niedrigsten Einheit anfangend. Ist die Summe kleiner, als die nächst höhere Einheit, so schreibe sie unten an; ist sie größer, so ziehe nach (179) die höhern Einheiten heraus und addire diese zu den Zahlen der folgenden Stelle links und so fort bis zur höchsten Einheit.

Beispiele.

a) Mit verschiedener Theilung der Einheiten.

1) 105 fl. 27 kr. 3 ₰. 19 fl. 38 kr. 3 ₰. 27 fl. 16 kr. 1 ₰. 5 fl. 3 ₰. 37 kr. 2 ₰. 15 fl. 18 kr. sollen summirt werden.

105 fl.	27 kr.	3 ₰.
19 „	38 „	3 „
27 „	16 „	1 „
5 „	— „	3 „
— „	37 „	2 „
15 „	18 „	— „
173 fl.	19 kr.	— ₰.

6|13|9 — 4|12

2 fl. 19 kr. — 3 kr.

2) 7 Ctr. 13 Pfd. 9 Loth 1 Qt.

15	„	18 „	7 „	1 „
45	„	47 „	19 „	3 „
68	„	73 „	27 „	1 „
136	„	52 „	31 „	2 „

1|52 32|63|32| 1 ℔. 4|6|12

31

3) 5 Pfd. 17 Loth $1\frac{1}{2}$ Qt. 5 Thlr. 9 Gr. $3\frac{1}{3}$ ℛ.

9 „ 18 „ $1\frac{1}{5}$ „ 6 „ 18 „ $1\frac{1}{4}$ „

15 „ 3 „ $2\frac{7}{10}$ Qt. 12 „ 3 „ $4\frac{7}{12}$ ℛ.

b) Bei der Decimaltheilung der Einheiten ist das Verfahren ganz dasselbe wie bei den Decimalbrüchen (159). Z. B.

1) 5 Fuß 9 Zoll 3 Lin., 17′ 9″ 8‴, 27′ 8″, 8″ 3‴, 27′ 9‴ sollen addirt werden.

5,93
17,98
27,8
0,83
27,09

79,63′ = 79′ 6″ 3‴

□′ □″ □‴ □′ □‴ □′ □‴

15 43 27 , 75 69 , 78 11

zusammen gibt wie viel?

15,4327
75,0069
0,7811

91,2207 □′ = 91 □′ 22 □″ 7 □‴

c′ c″ c‴ c‴′ c′ c‴″

5 9 , 13 127,1 , 7 53,02

gibt wie viel zusammen?

5,009
0,0131271
7,00005302

12,02218012 c′ = 12 c′ 22 c″ 180,12 c‴

Kommen bei den verschiedenen Einheiten Brüche vor, so müssen sie auf dieselbe Einheit bezogen werden, ehe man sie gleich benennt. Z. B.

$5\frac{3}{4}$ ℔. + $7\frac{1}{2}$ Loth = $5\frac{3}{4}$ ℔. + $\frac{7\frac{1}{2}}{32}$ ℔. = $(5\frac{3}{4} + \frac{15}{64})$ ℔.

$= 5\frac{48+15}{64} = 5\frac{63}{64}$ ℔.

oder in Lothen:

= 5 ℔. + (24 + 7½) Loth = 5 ℔. + 31½ Loth.

7½ fl. + 13¼ kr. + 1⅚ fl.

= 7 fl. 30 kr.
— „ 13¼ „
1 „ 50 „
9 „ 33¼ „

7¾ fl. + 15⅞ kr. + 1⅚ fl. + 1⅕ kr. + 27½ kr.

280

= 7 fl. 25¾ kr. | 200
— „ 15⅞ „ | 245
1 „ 50 „ |
— „ 1⅕ „ | 56
— „ 27½ „ | 140

10 fl. — 81/280 kr. 64 1/280 = 1 81/280

oder die Brüche der Kreuzer in ₰. ausgedrückt, wo man sie dann im bürgerl. Leben, wenn sie weniger als 1 halber ₰. betragen, wegläßt, betragen sie ½ oder mehr, als ein ganzer ₰. ansetzt.

70

7 fl. 25 kr. 2⅚ ₰. | 60
— 15 „ 3½ „ | 35
1 „ 50 „ — „ |
— 1 „ ⅘ „ | 56
— 27 „ 2 „ |

10 fl. — „ 1 57/70 ₰. 57/70

182) Ungleich benannte Zahlen zu subtrahiren.

Regel. Setze die gleich benannten Zahlen untereinander, subtrahire die Zahlen in den einzelnen Stellen von der niedrigsten Einheit anfangend. Enthält die Zahl des Minuenden weniger Einheiten als der Subtrahend hat, so borge aus der nächsthöhern Stelle eine Einheit und nimm sie in niedrigere Einheiten verwandelt (179) zu dem Minuenden.

Beispiel 1). Wenn von 59 fl. 27 kr. 3 ₰. ausgegeben werden 27 fl. 13 kr. 1 ₰., wie viel bleibt?

59 fl. 27 kr. 3 ₰
27 „ 13 „ 1 „
32 „ 14 „ 2 „

2) 17 fl. 18 kr. 1 ₰.
3 „ 29 „ 2 „
13 „ 48 „ 3 „

3) 31 ℔. 3 L. 1 Qt.
15 „ 14 „ 2 „
15 „ 20 „ 3 „

4) 27 Fuß 11 Zoll $1\frac{1}{2}$ Lin.
18 „ 9 „ $1\frac{1}{3}$ „
9 „ 2 „ $\frac{1}{6}$ „

5) 17 fl. — kr. — ₰. Einnahme
9 fl. 45 kr. 2 ₰. Ausgabe
7 „ 14 „ 2 „

6) $\square'$ $\overset{144}{\square''}$ $\overset{144}{\square'''}$
5 113 47
3 „ 128 „ 112 „
1 „ 128 „ 79 „

7) $\overset{c'}{}$ $\overset{1728}{c''}$ $\overset{1728}{c'''}$
179 1145 227
89 „ 1200 „ 527 „
89 „ 1672 „ 1428 „

Anmerk. Die übergeschriebenen 144 in 6) und 1728 in 7) sind die geborgte nächst größere Einheit in den kleinern ausgedrückt, die im Kopf zu den in der Stelle schon vorhandenen erst addirt werden, ehe man subtrahirt.

8) Von 5 Fuß 7 Lin. im 10 theiligen Meß soll man abziehen 2 Fuß 3 Zoll 8 Lin.

$$\begin{array}{r} 5{,}07 \\ 2{,}38 \\ \hline 2{,}69' = 2'\,6''\,9''' \end{array}$$

9) $(15\ \square'\ 27\ \square''\ 19\ \square''') - (13\ \square'\ 58\ \square''\ 78\ \square''') = ?$

$$\begin{array}{r} 15{,}2719 \\ 13{,}5878\,\square' \\ \hline 1{,}6841\,\square' = 1\ \square'\ 68\ \square''\ 41\ \square''' \end{array}$$

10) Von $7\ \overset{c'}{}$ soll man abziehen $1\ \overset{c'}{}\ \overset{c''}{278}\ \overset{c'''}{379}$

$$\begin{array}{r} 7, \\ 1{,}278379 \\ \hline 5{,}721621 = 5\ \overset{c'}{}\ 721\ \overset{c''}{}\ 621\ \overset{c'''}{} \end{array}$$

183) Beispiele über Addition und Subtraction.

1) Zu 5℔. 9 L. add. 1 Ctr. 2 L. und 4 ℔. und 109 ℔. 20 L.
Summe 2 Ctr. 18 ℔. 31 L.

2) Zu 22 Groſch. 9 ₰. addire 1 Thlr. 5 ₰. und 8 Gr. 1 ₰. und 5 Thlr. 3 ₰. Summe 7 Thlr. 7 Gr. 6 ₰.

3) Zu 7 Ball. 9 Rieß 12 Buch add. 1 Rieß 8 Buch und 1 Ball. 9 Rieß. Summe 10 Ball.

4) $\frac{3}{4}$ Ctr., $\frac{5}{8}$ Ctr., $\frac{13}{16}$ Ctr., $\frac{7}{8}$ Ctr., $\frac{11}{12}$ Ctr., $\frac{5}{24}$ Ctr. wie viel Ctr. und Pfd. zusammen? A. $\frac{20}{48}$' Ctr. = 4 Ctr. + $\frac{3 \cdot 110}{16}$ Pfd. = 4 Ctr. $20\frac{5}{8}$ Pfd.

5) $\frac{4}{5}$ Tag, $\frac{1}{5}$ Tag, $\frac{13}{15}$ Tag wie viel Tage, Stunden u. Minuten? A. 2 T. 10 Std. 40 Min.

6) $5\frac{3}{4}' + 3\frac{5}{8}' + 7\frac{1}{3}'$ nach 10 theil. Maß ist = 5,75 + 3,625 + 7,333 . . . = 16,70833 . . .

[7) $3\frac{2}{5}\,\square' + 5\frac{3}{4}\,\square' + 49\frac{1}{2}\,\square'' = 3,4\,\square' + 5,4287\,\square' \ldots$

$+ 0,495\,\square' = 9,3237\,\square' \ldots$

8) $917\frac{1}{2}\,c' + 113\frac{2}{5}\,c'' + 41\frac{2}{3}\,c'' = 917,5\,c' + 0,1134\,c' + 0,04166\,c' \ldots$

$= 917,655066\,c' \ldots = 917655,066\,c'' \ldots$

9) $5\frac{7}{8}' - 3,457' = 5,875' - 3,457' = 2,418' = 24,18'' = 241,8'''$

10) $3\frac{4}{5}\,\square'' - 156,7\,\square''' = 3,8\,\square'' - 1,567\,\square'' = 2,233\,\square''$

11) $5\frac{5}{4}\,c' - 3456\frac{1}{2}\,c'' = 5,7285\,c' \ldots - 3,4565\,c' = 2,2720\,c' \ldots$

12) Wer am 5. May 1786 geboren ist, wie alt ist der am 8. April 1810?

Aufl. 1809 Jahre 3 Mon. 8 Tage sind verflossen am 8. Apr. 1810
1785 „ 4 „ 5 „ waren verflossen am 5. May 1786
23 „ 11 „ 3 „ sind verflossen während der Mensch lebte.

13) Einer war geboren 1740 den 18. Sept., er starb den 12. April 1784, wie alt ist er geworden? A. 43 J. 6 M. 24 T.

14) Ein Vater war geboren 1724 den 25. Oktober, der Sohn 1758 den 9. Febr., wie viel älter war der Vater, als der Sohn? A. 33 J. 3 M. 14 T.

184) Eine ungleich benannte Zahl mit einer ganzen Zahl zu multipliziren.

Regel I. Multiplicire mit der Zahl zuerst die kleinsten Einheiten, sodann die nächstgrößere u. s. f. und addire zu dem Product der nächstgrößern immer gleich die Anzahl derselben Einheiten, die sich aus dem Product der kleinern ergeben haben.

Beispiele:

1) 5 fl. 17 kr. 3 ₰. 9 mal genommen ist wie viel?

5 fl.	17 kr.	3 ₰.
		9
45	153	4|27
2	6	6 kr. 3 ₰.
47 fl.	6|15|9	
	2 fl. 39 kr.	

also das Product 47 fl. 39 kr. 3 pf.

2) 3 Ctr. 78 Pfd. 9 Loth 1 Qt.

			12
36	936	108	4|12
9	3	3	3 L. — Qt.
45 Ctr.	9|39 Pfd,	32|111|3 Pfd.	
		96	
		15 Loth	

also 45 Ctr. 39 Pfd. 15 Loth — Qt.

3) (517 Ctr. 97 Pfd. 18 L. 3 Qt.) . 137 = 70962 Ctr. 69 Pfd. 8 L. 3 Qt.

4) (5 Schock 2 Mandel 12 Stück) . 3 = 17 Sch. 6 St.

Für Decimalmaße enthält schon (160) die Regel:

Beispiele:

1) 4′ 5″ 3‴ 15 mal zu nehmen. So hat man 453‴ . 15 = 6795′ oder 45,3″ . 15 = 679,5″ oder 4,53′ . 15 = 67,95′ (nach 179).

2) $(14\,\square' \; 17\,\square'' \; 29\,\square''')$,6 = 141729 $\square'''$. 6 = 850374 $\square'''$ oder 1417,29 $\square''$. 6 = 8503.74 $\square''$ oder 14,1729 $\square'$. 6 = 85,0374 $\square''$

3) $(1^{c'}\ 127^{c''}\ 3^{c'''}) \cdot 3 = 1127003^{c'''} \cdot 3 = 3381009^{c'''}$

$= 1127{,}003^{c''} \cdot 3 = 3381{,}009^{c''} = 1{,}127003^{c'} \cdot 3 = 3{,}381009^{c'}$

Hierher gehören noch folgende Aufgaben:

1) Wenn man für 1 fl. 3 ℔. 7½ Loth kauft, wie viel für 19 fl.? Offenbar 19mal so viel, oder 61 ℔. 14 L. 2 Dt.

2) Wenn man für 1 fl. 9 ℔. 3 L. 1½ Dt. kauft, wie viel für 138 fl.? Man kauft 138 mal so viel, oder 1256 ℔. 17 L. 2 Dt.

3) Wenn man für 1⅓ fl. 1 Metzen kauft, wie theuer kommen 13 Scheffel? Da 13 Scheffel 13 . 6 = 78 Mtz. sind, so kommen sie 78mal so theuer als 1 Metzen oder auf 104 fl.

Anmerk. Diese drei Aufgaben zeigen eine gewisse Größe von der andern so abhängig, daß zur mehrfachen einen die gleichvielfache andere gehört. Nennt man solche geradeabhängige, so läßt sich hieraus, wenn die abhängige Größe der Einheit gegeben ist, die abhängige Größe der Mehrheit finden. Man multiplicire nämlich die abhängige Größe der Einheit durch die Zahl der Mehrheit. Z. B. 1 ℔. kostet 7 fl. 11 kr.; so kosten 7 ℔. 7 mal 7 fl. 11 kr. oder 50 fl. 17 kr.

Beim Kauf und Verkauf ließe sich diese Regel so ausdrücken:

aus dem Preis der einfachen Waare findet man den Preis der mehrfachen, wenn man ihn mit der Zahl der mehrfachen Waare multiplicirt.

185) Division ungleichbenannter Zahlen durch eine reine Zahl.

Regel. Man theile jede Zahl von der größten Einheit anfangend, den Rest löse man in nächst kleinere Einheiten auf und addire ihn zu der Anzahl dieser kleinern Einheiten u. s. f. den Rest bei der kleinsten Einheit behandle wie (152) gelehrt.

Beispiele.

1) 27 fl. 13 kr. 2 ₰. unter 3 Personen gleich zu vertheilen, wie viel erhält jede?

3 | 27 fl. 13 kr. 2 ₰.

9 fl. 4 kr. 2 ₰.

2) 12 | 1516 fl. 29 kr. 2 ₰.
12 | 126 fl.
31
24
76
72
4 fl. dazu 29 kr
60
12 | 269 | 22 kr.
24
29
24
5 kr. dazu 2 ₰.
4
12 | 22 | $1\frac{5}{6}$ ₰.
12
10

3) 215 | 5789 Ctr. 59 ℔. 13 ℔.
430 | 26
1489
1290
199 Ctr. dazu 59 ℔.
215 | 19959 | 92 ℔.
1935
609
430
179 ℔. dazu 13 ℔.
32
358
537
13
215 | 5741 | 26 ℔.
430
1441
1290
151 ℔.
4
604 | $2\frac{174}{215}$ Dt.
430
174

Also ist der 12te Theil von 1516 fl. 29 kr. 2 ₰. 126 fl. 22 kr. $1\frac{5}{6}$ ₰. In 3) kommt: 26 Ctr. 92 Pfund. 26 ℔. $2\frac{174}{215}$ Dt.

4) 36542 Thlr. 20 gr. 4 ₰. durch 167 getheilt, gibt 218 Thlr. 19 gr. 8 ₰.

5) 437598 Ctr. 66 ℔. 21 ℔. 1 Dt. durch 479 getheilt, gibt 913 Ctr. 62 ℔. 11 ℔. $3\frac{356}{479}$ Dt. (1 Ctr. = 110 Pfd.)

Für die Benennung die nach 10, 100 oder 1000 Theilen fortschreitet, liegt die Regel schon in (161), wenn man die gegebenen Zahlen erst nach (179) gleich benennt.

Beispiele:

1) Was ist der 3te Theil von 27′ 9″ 3‴?

Es ist 27′ 9″ 3‴ = 2793‴, also $\frac{27'\ 9''\ 3'''}{3} = \frac{2793'''}{3}$

$= 931''' = \frac{279{,}3''}{3} = 93{,}1'' = \frac{27{,}93'}{3} = 9{,}31'$

2) Was ist der 251ste Theil von 87 □′ 92 □″ 53 □‴ ? Da diese gleich sind 879253 □‴ = 8792,53 □″ = 87,9753 □′ so dividire man eine dieser Zahlen durch 251.

```
251 | 87,9253 | 3503
    | 75 3    |
    ----------
    1262
    1255
    ----
     753
     753
     ---
       0
```

also ist $\frac{87{,}9253\ \square'}{251} = 0{,}3503\ \square'$

3) Was ist der 251ste Theil von 879 c′ 253 c″ ?

A. $\frac{879{,}253\ c'}{251} = 3{,}503\ c'$

Hierher gehören noch folgende Aufgaben:

1) Wenn 1 Pfd. 2 fl. 35 kr. 2 ₰. kostet, was kostet $\frac{1}{5}$ Pfd.? das Fünftel des Pfundes kostet offenbar nur den fünften Theil von dem Preise des ganzen Pfundes oder hier 31 kr. $\frac{2}{5}$ ₰.

2) Wenn man für 27 fl. 13 Pfd. 19 L. 3 Qt. kauft, wie viel für $\frac{1}{2}$ fl.? Da $\frac{1}{2}$ fl. der 54ste Theil ist von 27 fl., so kauft man für $\frac{1}{2}$ fl. nur den 54sten Theil von dem, was für 27 fl. folglich hier nur den 54sten Theil von 13 Pfd. 19 L. 3 Qt. oder 8 Loth und $\frac{5}{18}$ Qt.

Anmerk. Ueberhaupt gehören hierher die Aufgaben, wo aus der abhängigen Größe der Mehrheit die abhängige der Einheit gefunden wird. Man dividirt nämlich mit der Anzahl der Einheiten der Mehrheit ihre abhängige Größe. Z. B. Wenn 27 Arbeiter in derselben Zeit einen Graben von 5400′ Länge fertigen, wie viel einer?

A. $\frac{5400}{27}$ oder 200′.

Für den Kauf und Verkauf könnte man sagen, man findet aus dem Preis der mehrfachen Waare den Preis der einfachen, wenn man ihn durch die Zahl der mehrfachen dividirt.

186) Nun läßt sich auch eine ungleich benannte Zahl mit einem Bruch (149) multipliziren.

Beispiele.

1) Man soll 7 fl. 53 kr. $\frac{3}{5}$ mal nehmen, so heißt dieß entweder, man soll den 5ten Theil 3 mal, oder vom 3fachen den 5ten Theil nehmen.

Also entweder:

5 | 7 fl. 53 kr.

1 „ 34 „ $2\frac{2}{5}$

3

4 „ 43 „ $3\frac{1}{5}$ kr.

oder:

7 fl. 53 kr.

3

5 | 23 „ 39 „

4 „ 43 „ $3\frac{1}{5}$ kr.

oder wenn man die benannte Zahl in Theilen ihrer höchsten Einheit ausdrückt (179):

$7\frac{53}{60} \cdot \frac{3}{5} = \frac{473}{60} \cdot \frac{3}{5} = \frac{473}{100} = 4$ fl. $\frac{73 \cdot 60}{100}$ kr. $= 4$ fl. 43 kr. $\frac{8 \cdot 4}{10}$ pf. $= 4$ fl. 43 kr. $3\frac{1}{5}$ pf.

2) Was ist $\frac{3}{5}$ von 9 fl. 12 kr.? A. 5 fl. $31\frac{1}{5}$ kr.

3) — — $\frac{5}{8}$ — 7 Pfd. 28 Loth? A. 4 Pfd. 29 Lth. 2 Dt.

4) Wenn 1 Pfd. 7 fl. 18 kr. kostet, was kosten 3 Loth? A. 3 L. sind $\frac{3}{32}$ Pfd., also kosten 3 L. $\frac{3}{32}$ des Preises von 1 Pfd., also $7\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{32} = \frac{219}{320}$ fl. $= 41\frac{1}{16}$ kr. Oder wie oben in 1).

5) $(5' 7'' 3''') \cdot \frac{3}{5} = \frac{573''' \cdot 3}{5} = \frac{1719'''}{5} = 343{,}8''' = 34{,}38'' = 3{,}438'''$

6) $\left(7^{\square'}\ 13^{\square'''}\right) \frac{2}{3} = \frac{7{,}0013^{\square'} \cdot 2}{3} = \frac{14{,}0026^{\square'}}{3} = 4{,}667533^{\square'} \ldots = 466{,}7533^{\square''} \ldots = 46675{,}33^{\square'''} \ldots$

7) $\left(\begin{matrix} c' & c'' & c''' \\ 9 & 7 & 30 \end{matrix}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{9{,}0703^{c'} \cdot 3}{4} = \frac{27{,}02109^{c'}}{4} = 6{,}7552725^{c'} = 6755{,}2725^{c''} = 6755272{,}5^{c'''}$

Anmerk. Dahin gehören auch alle die Aufgaben, wo aus der abhängigen Größe einer Mehrheit die abhängige einer andern Mehrheit gefunden wird. Z. B. Wenn 7 Pfd. 13 fl. kosten, was kosten 11 Pfd. Da 11 Pfd. von 7 Pfd. $\frac{11}{7}$ sind, so kosten 11 Pfd. 13 . $\frac{11}{7}$ fl. oder $\frac{143}{7} = 20\frac{3}{7}$ fl.

Oder wenn 7 ℔. 13 fl. kosten, so kostet 1 ℔. $1\frac{3}{7}$ fl. also 11 ℔. 11 mal so viel oder $11 . 1\frac{3}{7} = 20\frac{3}{7}$ fl. Man könnte z. B. sagen: man findet aus dem Preis der einen mehrfachen Waare den Preis der andern, wenn man den Preis der ersten durch die Zahl des Mehrfachen dividirt und diesen Bruch durch die Zahl des andern Mehrfachen multiplicirt.

187) Hier lassen sich Abkürzungen und Vortheile anbringen, die man gewöhnlich unter dem Namen der (welschen) Praktik abhandelt. Beispiele werden die Sache klar machen.

1) Wenn 1 ℔. 19 fl. 27 kr. kostet, was kosten 5 ℔. 8 ℔.?

Rechg. 19 27
5
97 15 = 5 ℔.
4 $51\frac{3}{4}$ = $\frac{1}{4}$ ℔. 8 ℔.
102 fl. $6\frac{3}{4}$ kr. Preis von 5 ℔. 8 ℔.

2) Wenn 1 ℔. 3 fl. 25 kr. kostet, was kosten 3 ℔. 15 ℔. 2 Qt.?

Rechg. 3 fl. 25 kr. — ℞. = 1 ℔.

10 „	15 „	— „	=	3 ℔
— „	51 „	1 „	=	$\frac{1}{4}$ = 8 ℔.
— „	25 „	$2\frac{1}{2}$ „	=	$\frac{1}{4} . \frac{1}{2}$ = 4 ℔.
— „	12 „	$3\frac{1}{4}$ „	=	$\frac{1}{4} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$ = 2 ℔.
— „	6 „	$1\frac{5}{8}$ „	=	$\frac{1}{4} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{1}$ = 1 ℔.
— „	3 „	$\frac{13}{16}$ „	=	$\frac{1}{2}$. 1 Loth = 2 Qt.
11 „	54 „	$1\frac{3}{16}$ „	=	3 ℔. 15 ℔. 2 Qt.

Dieß Verfahren beruht darauf, daß man immer nur einen solchen Theil berechnet, der sich als ein Theil einer schon bestimmten Größe ohne Nebenrechnung leicht berechnen läßt. So ist also zuerst 8 ℔. = $\frac{1}{4}$ ℔. 4 ℔. = $\frac{1}{2}$ Viertelpfd. 2 ℔. von dem halben Viertelpfd. die Hälfte und von diesem ist 1 ℔. die Hälfte, vom Loth endlich ist 2 Qt. die Hälfte.

Anstatt so zu verfahren, kann man aber auch die verschieden benannten Größen in gleichbenannte auflösen und nach der Anmerk. zu (186) verfahren. Z. B.

1 ℔. = 128 Qt., 3 ℔. 15 ℔. 2 Qt. = 446 Qt.

also wenn 128 Qt. 3 fl. 25 kr. kosten, was kosten 446 Qt.?

A. (3 fl. 25 kr.) $\frac{446}{128}$ = $\frac{205 . 446}{128}$ kr. = $\frac{205 . 223}{64}$ kr. =

$\frac{45715}{64}$ kr. = $714\frac{19}{64}$ kr. = 11 fl. 54 kr. $1\frac{3}{16}$ ℞. wie oben.

3) Wenn 1 Ctr. 83 fl. 27 kr. kostet, wie hoch kommen 22 Ctr. 56 Pfd. 20 Loth?

1 Ctr.	=	83 fl.	27 kr.	— ₰.	
20 Ctr.	=	1669 fl.	— „	— ₰.	
2 Ctr.	=	166 „	54 „	—	
$\frac{1}{2}$ „	= 50 ℔.	=	41 „	43 „	2
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$	= 5 „	=	4 „	10 „	$1\frac{2}{5}$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5}$	= 1 „	=	— „	50 „	$\frac{7}{35}$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$	= — „ 16 ℔.	=	— „	25 „	$\frac{7}{50}$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$	= — „ 4 „	=	— „	6 „	$1\frac{7}{200}$
		1883 „	9 „	$\frac{17}{200}$	

oder nach der andern Art:

1 Ctr. = 3200 Loth, 22 Ctr. 56 Pfd. 20 Loth = 72212 ℔.,
83 fl. 27 kr. = 5007 kr.

Es fragt sich also, wenn 3200 Loth 5007 kr. kosten, was kosten 72212 Loth?

Nach der Anmerkung zu (186) kosten diese $\frac{5007 \cdot 72212}{3200}$ kr. =

$\frac{5007 \cdot 18053}{800}$ kr. = $\frac{90391371}{800}$ = $112989\frac{171}{800}$ kr. = 1883 fl. 9 kr. $\frac{171}{200}$ ₰.

4) Wenn 1 Klafter 84 Thlr. 6 Gr. $3\frac{1}{3}$ ₰. kostet, was kosten 15 Kl. 4 Fuß 6 Zoll 8 Lin.? A. 1324 Thlr. 15 Gr. $7\frac{128}{648}$ ₰.

Berechnung.

10 Kl.	=	840 Thlr.	60 gr.	$33\frac{1}{3}$ ₰.	
5 Kl.	=	420 „	30 „	$16\frac{2}{3}$ „	
$\frac{1}{2}$ = 3 Fuß	=	42 „	3 „	$1\frac{2}{3}$ „	
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ = 1	=	14 „	1 „	$\frac{5}{9}$ „	
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ = 6 Zoll	=	7 „	— „	$6\frac{5}{18}$ „	
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}$ = 6 Lin.	=	— „	14 „	$\frac{113}{216}$ „	
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3}$ = 2 Lin.	=	— „	4 „	$8\frac{113}{648}$ „	
15 Kl. 4 Fuß 6 Zoll 8 Lin.	=	1324 „	15 „	$7\frac{128}{648}$ „	

5) Wenn man für 9 Pfd. 27 ℔. 3 Qt. 51 fl. 47 kr. 3 ₰. gibt, was kosten 24 Pfd. 25 ℔. 1 Qt.?

Offenbar läßt sich diese Aufgabe so lösen, daß man fragt, wie viel Pfen. 1 Qt. kostet und daraus den Preis der Qt. in den 24 Pfd. ꝛc. berechnet.

Also 9 Pfd. 27 L. 3 Qt. = 1263 Qt., 24 Pfd. 25 L. 1 Qt. = 3173 Qt. 51 fl. 47 kr. 3 h. = 12431 h. so kosten 3173 Qt. $= \frac{12431 \cdot 3173}{1263}$ h. $= \frac{39443563}{1263}$ h. $= 31230\frac{73}{1263}$ h. = 7807 kr. $2\frac{73}{1263}$ h. = 130 fl. 7 kr. $2\frac{73}{1263}$ h.

Anmerk. 1. Oft hört man von der Multiplication einer benannten Zahl mit einer andern benannten Zahl sprechen. Dieß widerspricht aber dem Begriffe der Multiplication, nach welchem der Multiplicator eine reine Zahl sein muß. Scheint es gleichwohl in irgend einer Aufgabe verlangt zu werden, so wird man immer finden, daß von der einen Zahl (dem Multiplicator) die Einheit oder Benennung gar nicht auf das Product einwirkt, sondern blos die Anzahl dieser Einheiten als reine Zahl zum Multiplicator genommen wird. Z. B. kauft man für 27 fl. 9 Pfd., so frage sich, wie viel für 45 Pfd.? Offenbar dividirt man hier 27 fl. durch 9 (aber nicht durch 9 Pfund), um zu finden, was 1 Pfd. kostet und multiplicirt das Herausgekommene mit 45 (aber nicht mit 45 Pfd.), um zu finden, was 45 Pfd. kosten. Die Einheit der ganzen Zahlverbindung $\frac{27}{9} \cdot 45$ ist also der Gulden, der es in der Zahl 27 ist und weder von 9 noch von 45 wird in derselben die Einheit oder Benennung betrachtet.

Eben so ist es in den (187) aufgeführten Beispielen. Wenn z. B. 1 Pfd. 3 fl. 25 kr. kostet, was kosten 3 Pfd. 15 Loth 2 Quint? Hier ist 3 fl. 25 kr. nach der gewöhnlichen Art zu sprechen, mit 3 Pfund 15 Loth 2 Quint zu multipliciren; allein dieß ist ganz irrig. Da vielmehr 3 fl. 25 kr. nur so oft zu nehmen ist, als 1 Pfund enthalten ist in 3 Pfund 15 Loth 2 Quint, so kommt hier bei der Multiplication selbst diese Benennung gar nicht in Betracht, und 3 Pfund 15 Loth 2 Quint ist bloß der Ausdruck $(3 + \frac{15}{32} + \frac{1}{64})$ als wie oft 1 Pfd. in 3 Pfd. 15 L. 2 Qt. enthalten ist, mit welchem man multipliciren muß. Und da es einerlei ist, ob man mit der Summe oder den einzelnen Summanden multiplicirt, so kann man, wie geschehen, verfahren.

Anmerk. 2. Im gemeinen Verkehr kommt es meist bloß darauf an, das Resultat so genau zu erhalten, als es in der Münze oder in dem Gewicht wirklich angegeben werden kann. Man betrachtet daher z. B. Theile des Pfennig oder Quint nur so weit, als nöthig ist, um das Richtige zu erhalten, ohne sich auf größere Nenner einzulassen. So dürfte man im Beispiel 3. alle Brüche des Pfennigs weglassen, und am Ende 1 Pfennig im Ganzen ohngefähr ansetzen. Eben so läßt man im Beisp. 4. zuerst $\frac{1}{3}$ weg, nimmt dann 17 statt 16, 2 statt $1\frac{3}{4}$, läßt darauf $\frac{5}{8}$ weg, eben so $\frac{5}{128}$, für $\frac{1}{2}\frac{13}{16}$ setzt man 1, dagegen läßt man $\frac{1}{6}\frac{13}{48}$ weg, so kommt

33 + 17 + 2 + 6 + 1 + 8 = 67 wie oben. $\frac{128}{848}$ als weniger als ½ Pfennig wird nicht weiter beachtet.

Anmerk. 3. Man schreibt meist nicht alle Brüche an, welche als Factoren der Haupteinheit den kleinern Theil in größern angeben, sondern nur den, welcher sich auf die nächst vorhergehende Einheit bezieht. So im 2ten Beispiel statt ¼ . ½ nur ¼ (nämlich von 8 Loth); statt ¼ . ½ . ¼ nur ½ (nämlich von 4 Loth) u. s. f.

188) Eine Division einer benannten Zahl durch eine andere kann nur so verlangt werden, daß man fragt, wie oft eine zusammengesetzt benannte Zahl in einer andern gleichartigen enthalten sey. Hier bringe man sie zuerst auf gleiche Einheiten und dividire dann, wie bei reinen Zahlen.

Beispiele.

1) Wenn man 235 fl. 27 kr. hat, wie viel Arbeiter können damit gezahlt werden, wenn jeder 13 fl. 22 kr. 2 ₰. verdient hat?

235 fl. 27 kr. = 56508 ₰., 13 fl. 22 kr. 2 ₰. = 3210 ₰.
So oft also 3210 ₰. in 56508 ₰. enthalten ist, so viel Arbeiter können gezahlt werden.

3210	56508	17 Arbeiter.
	321	
	2440	
	2247	
	193	

Anmerk. Der Rest 1938, welcher hier bleibt, ist so zu verstehen, daß dem 18ten Arbeiter nicht die ganze Forderung, sondern nur $\frac{1938}{3210}$ derselben gegeben werden kann, oder 8 fl. 4 kr. 2 Pf.

2) Wie viel mal ist 137 Thlr. 19 Gr. 11 ₰. in 2343 Thlr. 2 Gr. 7 ₰. enthalten? A. 17 mal.

3) Wie viel mal ist 257 Thlr. 18 Gr. 7 ₰. in 3788 Thlr. 14 Gr. enthalten? A. 14 mal und 179 Thlr. 17 Gr. 10 ₰. ist der Rest.

4) Wie oft sind 2,5″ in 2,054′ enthalten? A. Da 2,054′ = 20,54″, so hat man $\frac{20,54}{2,5}$ = 8,216 mal.

5) Wie oft sind $1{,}792^{c''}$ in $0{,}345^{c'}$ enthalten? A. Da $0{,}345^{c'} = 345^{c''}$, so hat man $\frac{345}{1{,}792} = 192{,}5 \ldots$ mal.

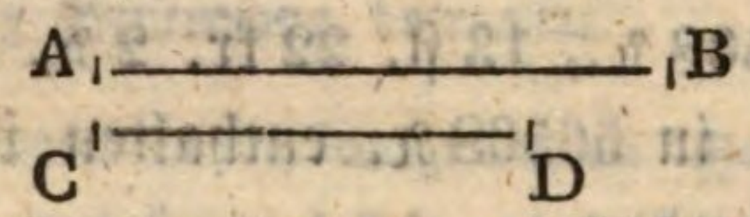
Neunter Abschnitt.

Von den Verhältnissen.

§. 1.

Von dem arithmetischen Verhältniß.

189) Wenn ich sehe, um wie viel die Linie AB die Linie CD übertrifft, oder wie viel ich zur Linie CD hinzufügen muß, um AB zu bekommen, so betrachte ich das arithmetische Verhältniß derselben.



Man bezeichnet dieses Aneinanderhalten zweier Größen wie den Unterschied derselben, da es nur auf diesen dabei ankommt. Z. B. AB — CD oder überhaupt A — B.

190) Derselbe Unterschied, den zwei Größen haben, kann sich auch bei andern gleichartigen Größen finden. Z. B.

$$4 - 2 = 2 \quad \text{und} \quad 7 - 5 = 2$$

Daher kann ein arithmetisches Verhältniß einem andern gleich sein, z. B.

$$4 - 2 = 7 - 5$$

Eine solche Gleichung heißt man eine arithmetische Proportion oder Verhältnißgleichung.

191) Ihre wichtigste Eigenschaft ist, daß die Summe der beiden Mittelglieder gleich ist der Summe der Aussenglieder. Z. B. ist $5 - 4 = 7 - 6$, so ist

$$5 + 6 = 4 + 7$$

Sind die Mittelglieder einander gleich, so ist eines derselben die halbe Summe der Aussenglieder. Z. B.

Ist $7 - 4 = 4 - 1$
so ist $4 = \frac{7+1}{2}$

Die Zahl 4 nennt man das arithmetische Mittel von 7 und 1.

Zusatz. Auch für mehrere Zahlen spricht man vom arithmetischen Mittel. Man erhält es, wie hier für 2 Glieder, wenn man die Summe der Zahlen durch ihre Anzahl dividirt. Z. B. für 7, 8, 9, 12 ist das arithmetische Mittel $\frac{7+8+9+12}{4} = \frac{36}{4} = 9$

Beispiele.

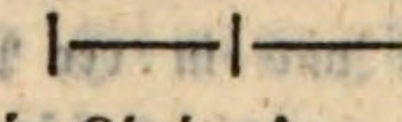
1) 3 Sorten Wein werden zusammengegossen, von jeder gleich viel. Von der ersten Sorte kostet 1 Maß 13 kr., von der zweiten 17 kr., von der dritten 12, wie hoch kommt die Maß des Gemischs? A. 14 kr.

2) Am 15. Juni stand das Thermometer auf 15,5°
— 16. — — — — — 15,4
— 17. — — — — — 15
— 18. — — — — — 16,3
— 19. — — — — — 17
— 20. — — — — — 17,5
— 21. — — — — — 18
so ist das arithmetische Mittel oder der mittle Thermometerstand dieser Tage $\frac{114,7}{7} = 16,385 \ldots$

§. 2.

Vom geometrischen Verhältniß.

192) Denkt man sich zwei Größen in demselben Maß ausgedrückt, und hält man die Zahlen gegen einander, welche anzeigen, wie oft jede das Maß enthält, so faßt man ihr geometrisches Verhältniß auf.



Ist, z. B., die Linie $A = 3 . C$, $B = 2 . C$, so sagt man man, daß sich A zu B verhalte, wie 3 zu 2. So verhält sich das Loth zum Pfund, wie 1 zu 32.

Man bezeichnet dieses Gegeneinanderhalten zweier Größen von gleicher Einheit durch (:) und schreibt statt A verhält sich zu B, A : B.

193) Eine Größe ist also bekannt, wenn eine gleichartige und ihr Verhältniß zu dieser bekannt ist. Z. B. Verhält sich A : B wie 3 : 4, so heißt dieß B in 4 Theile getheilt und davon 3 genommen ist A, $A = \frac{3B}{4}$. Oder umgekehrt $B = \frac{4}{3}A$.

Zusatz. Die Zahlen 3 und 4 geben hier an, wie viel gleiche Einheiten in A und B enthalten sind und mögen die Bestimmungszahlen heißen.

Anmerk. 1. Das geometrische Verhältniß darf nicht mit dem Quotienten und Bruch verwechselt werden, wie es hier und da geschieht. Quotient und Bruch sind bestimmte Verbindungen von Größen, um eine Größe oder Zahl zu erhalten. Fragt man, z. B., wie oft 3 fl. in 27 fl. enthalten seien, so ist die Antwort „9mal" der Quotient (das wie viel mal); und es wird eben sowohl das Ergebniß 9 der Rechnung selbst, als die bloße Zusammenstellung der Größen mit Bezeichnung der Art und Weise, wie gerechnet werden soll, oder $\frac{27\text{ fl.}}{3\text{ fl.}}$, ein Quotient genannt.

Fragt man, welche Größe 3mal der 4te Theil eines Ganzen A sei, so liegt hierin ebenfalls das Verlangen, eine bestimmte Größe aus einer andern zu erzeugen und eben sowohl die wirklich erzeugte Größe, als die bloße Bezeichnung dessen, was geschehen soll oder $\frac{3 \cdot A}{4}$, oder $\frac{3}{4}.A$ heißt ein Bruch von A.

Im Verhältniß dagegen handelt es sich nicht um die Hervorbringung einer Größe aus der andern, sondern um das gegenseitige Ineinanderstellen; man fragt, wenn vom Verhältniß zwischen A und B die Rede ist, nicht wie oft A in B oder B in A enthalten sei, sondern wie oft jede das Gemeinschaftliche (Maß) enthalte. Verhalten heißt sich gegenseitig enthalten. Daß man, wenn das Verhältniß von A zu B bekannt ist, auch wisse, wie A aus B, oder B aus A erzeugt werde, folgt von selbst. Aber im Verhältniß und in der Proportion wird nicht gerechnet, sondern man stellt hier nur die Größen zum Behuf der Rechnung zusammen, und sucht die Veränderungen auf, die sich an den so zusammengestellten Größen vor der eigentlichen Rechnung zur Erleichterung von dieser vornehmen lassen.

Anmerk. 2. Im Verhältniß lassen sich nicht bloß zwei Größen zusammenstellen, sondern auch mehrere. Immer ist das Verhältniß bekannt, wenn für dasselbe Maß die Bestimmungszahlen gegeben sind und ist ausser diesen noch ein Glied des mehrgliederigen Verhältnisses oder das gemeinschaftliche Maß selbst bekannt, so sind alle übrigen leicht zu finden. So stehen z. B. die drei gemischten Zahlen $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{5}$, oder $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{6}{5}$, oder $\frac{45}{30}$, $\frac{100}{30}$, $\frac{36}{30}$ im Verhältniß von 45 : 100 : 36, d. h. wenn man alle 3, wie hier geschehen, in gleichen Einheiten ausdrückt, so haben sie nach der Reihe 45, 100, 36 Einheiten. Weiß man dieß und kennt man z. B. die eine $\frac{3}{2}$, so sind dadurch die beiden andern auch gegeben. Der Conventionsthaler, der Kronthaler und der sächsische Thaler verhalten sich = $2\frac{2}{3} : 2\frac{7}{10} : 1\frac{4}{5}$, wie $\frac{12}{5} : \frac{27}{10} : \frac{9}{5}$, wie $\frac{24}{10} : \frac{27}{10} : \frac{18}{10}$, wie 24 : 27 : 18, wie 8 : 9 : 6.

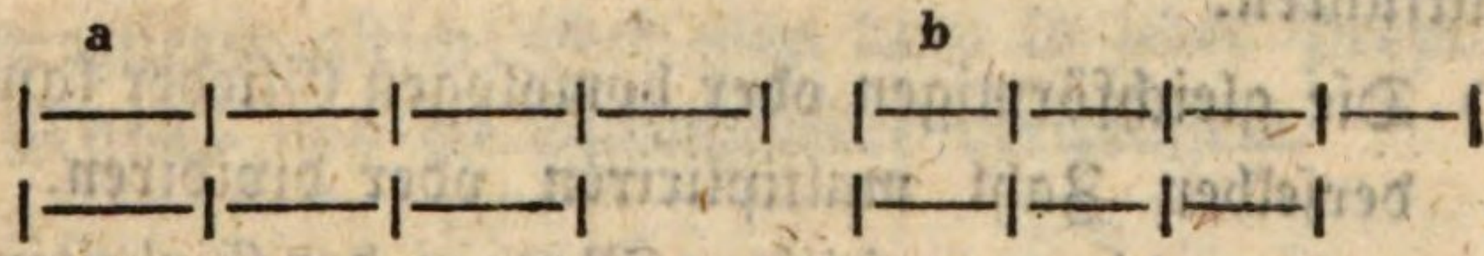
Anmerk. 3. Geometrisch heißt dieses Verhältniß wegen seiner vielfachen Anwendung in der Geometrie.

194) Ist die Einheit in beiden Größen dieselbe, so kommt es nur auf die gegenseitige Menge der Einheiten an oder auf die Bestimmungszahlen beider Größen und es kann dasselbe Verhältniß in jeder beliebigen Größe ausgedrückt werden.

Z. B. 3 fl. : 5 fl., 3 ℔. : 5 ℔. u. s. w.

Es kann also ein Verhältniß einem andern gleich sein, wenn ihre Bestimmungszahlen gleich sind; und durch diese Gleichsetzung zweier Verhältnisse erhält man eine Verhältnißgleichung oder Proportion und zwar hier eine geometrische.

Z. B. 5 fl. : 9 fl. = 10 ℔. : 18 ℔.



4a : 3a = 4b : 3b

oder 7 : 9 = 21 : 27

7 und 21 nennt man Vorderglieder

9 und 27 Hinterglieder.

beide Paare, da sie gleichviel Einheiten haben, gleichförmige oder homologe Glieder. 7 und 9, 21 und 27

nennt man Verhältnißglieder, sie haben gleiche Einheiten.

Zus. Ist $a:b = c:d$ und ist $a \lessgtr b$, so ist auch $c \lessgtr d$

Z. B. $5:5 = 6:6$
$5:3 = 10:6$
$3:2 = 6:4$

195) In jeder Verhältnißgleichung kann man folgende Veränderungen der Glieder vornehmen, so daß doch die Verhältnisse gleich bleiben.

1) Die Verhältnißglieder kann man mit derselben Zahl multipliciren oder dividiren. Dadurch ändert man bloß die Einheit, nicht die Menge der Einheiten.

Z. B. Für $5:10 = 1:2$ kann man schreiben
$5:10 = 9:18$
$0{,}5:1 = 0{,}9:1{,}8$
das Verhältniß bleibt $1:2$, nur statt in 1 wird es nun in 9, $\frac{1}{10}$, $\frac{9}{10}$ ausgedrückt.

Zusatz 1. Diesen Satz kann man auch so ausdrücken: zwei Größen verhalten sich wie ihre Gleichvielfachen und wie ihre Gleichvieltheile.

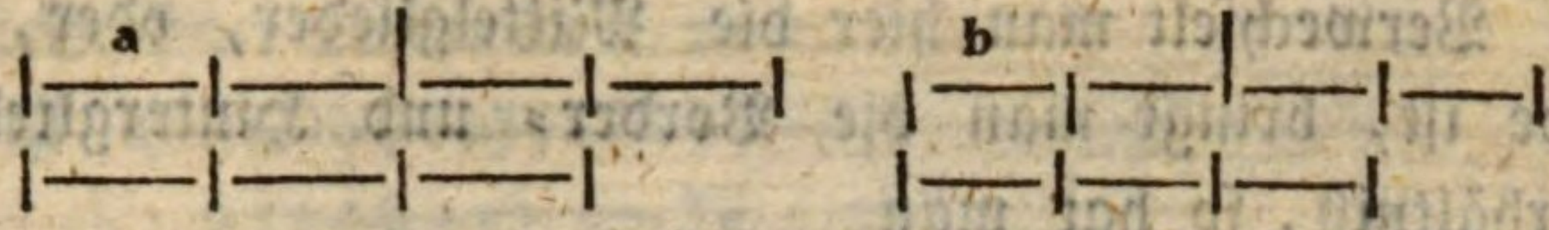
Z. B. $5\frac{1}{4}$ Pfd. : $3\frac{1}{2}$ Pfd. $= \frac{21}{4}$ Pfd. : $\frac{7}{2}$ Pfd. $= \frac{21}{4}$ Pfd. : $\frac{14}{4}$ Pfd. $= 21$ Pfd. : 14 Pfd. $= 3$ Pfd. : 2 Pfd. $= 3:2$

1 fl. : 1 Kronthlr. $= 1$ fl. : $2\frac{7}{10}$ fl. $= \frac{10}{10} : \frac{27}{10} = 10:27$.

Zusatz 2. Man kann also jedes Verhältniß, das in Brüchen gegeben ist, auf ein Verhältniß in ganzen Zahlen zurückführen.

2) Die gleichförmigen oder homologen Glieder kann man mit derselben Zahl multipliciren oder dividiren. Hierdurch werden die gegenseitigen Mengen der Einheiten in beiden Verhältnissen gleichmäßig verändert.

Z. B. Für $10:3 = 30:9$
erhält man $5:3 = 15:9$
oder $10:1 = 30:3$
oder $10:6 = 30:18$
die eben so richtig sind, da die gleichförmigen Glieder gleichviel Einheiten haben.

Hat man 

4a : 3a = 4b : 3b, so ist auch

2a : 3a = 2b : 3b

3) Man kann die homologen oder gleichförmigen Glieder um gleich viel Einheiten jedes Verhältnisses vermehren oder vermindern.

Hat man 4 ℔. : 3 ℔. = 40 fl. : 30 fl.

so ist auch (4 ℔. + 2 ℔.) : 3 ℔. = (40 fl. + 20 fl.) : 30 fl.

oder 6 ℔. : 3 ℔. = 60 fl. : 30 fl.

aber auch (4 ℔. — 2 ℔.) : 3 ℔. = (40 fl. — 20 fl.) : 30 fl.

oder 2 ℔. : 3 ℔. = 20 fl. : 30 fl.

In Linien würde nach vorigem Beispiel sein:

(4a ± a) : 3a = (4b ± b) : 3b

Daher kann man auch das Hinterglied jedes Verhältnisses vom Vorderglied abziehen oder zu ihm addiren, die Verhältnisse bleiben einander gleich.

Z. B. (4a ± 3a) : 3a = (4b ± 3b) : 3b

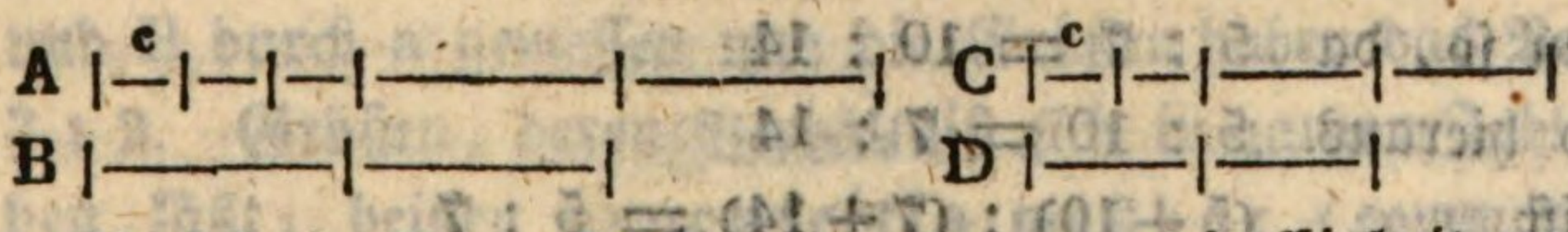
d. h. 7a : 3a = 7b : 3b

oder a : 3a = b : 3b

196) Alle diese Veränderungen können vorgenommen werden, es mögen alle 4 Glieder gleichartige Größen, oder das erste Verhältniß zwischen andern Größen gegeben sein, als das zweite. Folgende Sätze setzen aber voraus, daß alle 4 Glieder der Proportion gleichartig sind.

1) Das Verhältniß der Vorderglieder ist dem Verhältniß der Hinterglieder gleich, oder man kann in jeder Proportion die Mittel- und die Außenglieder verwechseln.

Beispiel 1.



1) Ist A : B = C : D oder, wenn a die Einheit von A und B, b die von C und D bezeichnet, 3a : 2a = 3b : 2b so nehme man an, a sey = 3c und b = 2c, so konnte man schreiben: 3 (3c) : 2 (3c) = (2c) : 2 (2c)

Verwechselt man hier die Mittelglieder, oder, was dasselbe ist, bringt man die Vorder- und Hinterglieder in ein Verhältniß, so hat man

3 (3c) : 3 (2c) und 2 (3c) : 2 (2c)

Dafür kann man setzen (77)

3 (3c) : 2 (3c) und 3 (2c) : 2 (2c)

Diese beiden Verhältnisse sind aber gleich, weil die Verhältnißglieder gleiche, die homologen Glieder gleichviel Einheiten haben (194): es ist also auch

A : C = B : D

Beispiel 2.

Ist 5 : 7 = 10 : 14

so ist 5 : 10 = 7 : 14

Zusatz. Das Verhältniß der homologen Glieder ist dem Verhältniß der Einheiten in beiden Verhältnissen gleich. Z. B. Ist 5 : 7 = 10 : 14 und hieraus 5 : 10 = 7 : 14, so ist in der ersten Proportion das Verhältniß der Einheiten 1 : 2, welches = 5 : 10 = 7 : 14 ist.

2) Die Summen oder Unterschiede der homologen Glieder verhalten sich wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied, oder wie das gegebene Verhältniß.

Beispiel.

1) Ist wie oben: 3a : 2a = 3b : 2b

so ist (196, 1) 3a : 3b = 2a : 2b

also nach (195, 3) (3a ± 3b) : 3b = (2a ± 2b) : 2b

also nach (196, 1) (3a ± 3b) : (2a ± 2b) = 3b : 2b

und dieß stimmt auch mit (194) überein, denn 3a ± 3b = 3 (a ± b), 2a ± 2b = 2 (a ± b); also hat man 3 (a ± b) : 2 (a ± b) = 3b : 2b, was richtig ist.

2) Eben so, da 5 : 7 = 10 : 14

und hieraus 5 : 10 = 7 : 14

so ist (5 + 10) : (7 + 14) = 5 : 7

Und es ist auch 15 : 21 = 5 : 7

Dieß läßt sich auf mehrere gleiche Verhältnisse ausdehnen, die in gleichartigen Größen gegeben sind.

Ist z. B. $3a : 2a = 3b : 2b = 3c : 2c \ldots$
so ist $(3a+3b+3c) : (2a+2b+2c) = 3(a+b+c)$
$: 2(a+b+c) = 3a : 2a \ldots$

197) Jede Proportion kann man auf 4 Arten schreiben.

Ist $4 : 5 = 8 : 10$, so kann man setzen:

$5 : 4 = 10 : 8$
$8 : 10 = 4 : 5$
$10 : 8 = 5 : 4$

Hierdurch wird im Wesen nichts verändert, da die Glieder in ihrer gegenseitigen Stellung bleiben.

Sind aber alle 4 Glieder gleichartig, so kann man nach (196, 1) durch Verwechslung der Mittelglieder eine neue Proportion erhalten, die man wieder auf 4 Arten anschreiben kann: dann hat man also aus 4 Gliedern 8 Proportionen, welche aber nur 2 verschiedene sind. Z. B.

$A : B = C : D$
$B : A = D : C$
$C : D = A : B$
$D : C = B : A$

$A : C = B : D$
$C : A = D : B$
$B : D = A : C$
$D : B = C : A$

198) Ein Verhältniß ist erst dann faßlich, wenn es in Zahlen angegeben ist; so lange dieß nicht der Fall ist, bedeutet A : B blos, daß man A und B mit demselben Maß messen und die Zahlen festhalten soll, die man dadurch erhält. Lassen sich nun beide Größen mit demselben Maß vollständig messen, so läßt sich ihr Verhältniß in reinen Zahlen bestimmt angeben. Z. B. In (196) ist $A = 2a$ $B = 2a$, also ist A und B durch a gemessen und die Größen haben das Verhältniß 3 : 2. Größen, deren Verhältniß sich in ganzen Zahlen angeben läßt, heißen **gegenseitig meßbar** (commensurabel) und ihr Verhältniß ein **rationales Verhältniß**.

Größen können aber auch gleichartig sein, ohne daß sich genau ein Maß für beide angeben läßt, dann heißen sie **unter**

sich unmeßbar (incommensurabel). Ist dieß der Fall, so kann man sich dem wahren Zahlwerthe ihres Verhältnisses, wenigstens so nahe man will, nähern, und das Verhältniß wird ein irrationales genannt. Z. B.

B sey in A 1mal enthalten und bleibt C als Rest,
C — B 3mal — — — D — —
D — C 1mal — — — E — —
E — D 1mal — — — F — —
F — E 1mal — — — G — —
G — F 1mal — — — H — —

u. s. w.

so sieht man, daß die Reste bei fortgesetztem Messen des vorigen Maßes durch den letzten Rest immer kleiner werden. Läßt man also endlich einen dieser Reste als unbedeutend weg, so hat man, wenn dieß z. B. mit G geschieht, die Größe A um G zu klein, und der Ausdruck für das Verhältniß ist nicht ganz genau. Läßt man dagegen erst H weg, so wird der Ausdruck genauer, und so kann man fortfahren, bis man hinreichende Genauigkeit erreicht hat. Es ist nämlich, weil

	G weggelassen.	H weggelassen.
A = B + C	= 14 F	= 23 G
B = 3C + D	= 11 F	= 18 G
C = D + E	= 3 F	= 5 G
D = E + F	= 1 F	= 3 G
E = F + (G)		= 2 G
F = G + (H)		

im ersten Fall A : B = 14 : 11, im andern = 23 : 18.

Läßt man das Erste gelten, so ist $A = \frac{14}{11} B$; im andern Falle ist $A = \frac{23}{18} B$. Umgekehrt B ist im ersten Falle $\frac{11}{14} A$, im andern $\frac{18}{23} A$. Aber $\frac{11}{14} > \frac{18}{23}$ um $\frac{1}{3 \cdot 14}$ umgekehrt $\frac{14}{11} < \frac{23}{18}$ um $\frac{1}{198}$.

Zusatz. Es läßt sich also jedes Verhältniß entweder vollständig oder doch annähernd in reinen Zahlen ausdrücken, wenn man seine Glieder mit gleichem Maße mißt.

199) Irrationalverhältnisse sind gleich, wenn ihre angenäherten Bestimmungszahlen, so weit man auch mit der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Maßes fortgehen mag, dieselben

sind. Das heißt, wenn A : B erst wie 14 : 11, dann wie 23 : 18 u. s. w. sich verhalten und dann 2 andere Größen a und b auch zuerst wie 14 : 11, sodann wie 23 : 18 u. s. w. sich verhalten, so verhält sich A : B = a : b.

Zusatz. Es läßt sich leicht zeigen, daß alle Veränderungen, welche oben nur an Rationalverhältnissen nachgewiesen worden, auch für Irrationalverhältnisse gelten.

200) In jeder Proportion, die auf reine Zahlen zurückgeführt ist (198, Z.), geben die Außenglieder und Innenglieder multiplicirt gleiche Producte. Z. B.

Ist 5 fl. : 3 fl. = 15 ℔. : 9 ℔.
so ist 5 : 3 = 15 : 9
und hier ist $5 \cdot 9 = 3 \cdot 15$

Zusatz 1. Dieser Satz lehrt also, daß man eine Verhältnißgleichung stets in eine Productgleichung verwandeln kann. Ist dieß geschehen, so lassen die Zahlen, die man in den Producten erhalten, alle die Verbindungen zu, welche von Zahlen überhaupt gelten.

Zusatz 2. Umgekehrt sieht man, daß jede Gleichung zweier Producte als Verhältnißgleichung geschrieben werden kann, wenn man die beiden Factoren des einen Products zu Mittel-, die des andern zu Außengliedern macht. Z. B.

Ist $am = bn$, so ist $a : b = n : m$

Oder sind 5 Thlr. = 9 fl., so ist 1 Thlr. : 1 fl. = 9 : 5

201) Wenn die Glieder einer Proportion, die in reinen Zahlen angegeben ist, oder die man doch auf reine Zahlen zurückführen kann, mit den Gliedern einer andern durch Multiplikation oder Division verbunden werden, so erhält man wieder eine richtige Proportion. Z. B.

1) $5 : 7 = 10 : 14$
$9 : 10 = 18 : 20$
$45 : 70 = 180 : 280$

denn $(5 \cdot 9)(1 \cdot 1) : (7 \cdot 10)(1 \cdot 1) = 5 \cdot 9 (2 \cdot 2) : (7 \cdot 10)(2 \cdot 2)$

2) $20 : 12 = 10 : 6$
$4 : 6 = 2 : 3$
$\frac{20}{4} : \frac{12}{6} = \frac{10}{2} : \frac{6}{3}$

denn $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{2} : \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{1} : \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{1}$

Allgemein: $a : b = c : d$

$m : n = p : q$

$am : bn = cp : dq$

eben so $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$

Zusatz 1. Diese Verbindung ist auch für mehrere Proportionen richtig. Z. B.

$4 : 5 = 8 : 10$

$1 : 2 = 2 : 4$

$5 : 6 = 15 : 18$

$20 : 60 = 240 : 720$

Zus. 2. Daher auch $a : b = c : d$,

$b : e = d : f$

$ab : be = cd : df$

oder (nach 195) $a : e = c : f$

Diese Verbindung der Proportionen nennt man die Verbindung aus dem Gleichen (ex aequo). Sie gilt auch für mehr Gleichungen. Z. B.

$A : B = a : b$

$B : C = b : c$

$C : D = c : d$

$A : D = a : d$

Zusatz 3. Eben so könnte man setzen:

1) $a : b = c : d$

2) $a : e = c : f$

3) $b : e = d : f$

Denn setzt man für 2) (nach 197)

$e : a = f : c$

so ist (nach Z. 2.) $e : b = f : d$, wie 3)

Zusatz 4. Eben so könnte man verbinden:

1) $a : b = c : d$

2) $a : e = f : d$

3) $b : e = f : c$

Denn setzt man für 2) nach (197)

$e : a = d : f$

so ist (Z. 2.) $e : b = c : f$, wie 3)

Sätze, die man wörtlich so ausdrücken kann:

1) Sind in 2 Proportionen die Vorderglieder gleich, so sind die Hinterglieder proportionirt.

2) Sind die Aussenglieder gleich, so sind die Mittelglieder umgekehrt proportionirt, d. h. sie müssen in umgekehrter Ordnung aus beiden Proportionen genommen werden.

202) Hat man eine Proportion zwischen 4 gleichartigen Größen, z. B.

$$A : B = C : D$$

und ist $A \gtreqless C$, so ist auch $B \gtreqless D$

Denn setzt man (196, 1)

$$A : C = B : D$$

so ist nach (194, Z.) wenn $A \gtreqless C$ auch $B \gtreqless D$.

Ist z. B. $3a : 4a = 6a : M$

so ist da $3a < 6a$ auch $4a < M$

203) Wenn in einer Proportion 3 Glieder bekannt sind, so läßt sich das 4te finden.

Beweis. Es sei $a : b = c : x$, so hat x, wenn dieß die unbekannte Zahl bezeichnet, mit c die Einheit, mit b die Menge der Einheiten gemein (194). Aus x finde ich die Einheit, wenn ich es mit a dividire, da es mit a gleich viel Einheiten hat; also ist $\frac{c}{a}$ eine Einheit sowohl von c, als von x, diese nehme ich b mal, so ist $x = \frac{c}{a} \cdot b$.

Beispiel.

1) 5 ℔. : 2 ℔. = 3 fl. : x fl.

Da x fl. eben die Einheit haben soll als 3 fl., und 3 fl. so viel Einheiten hat, als 5 ℔., so ist eine Einheit $\frac{3}{5}$ fl.; solcher Einheiten hat x aber 2, also ist es $\frac{3}{5} \cdot 2$ fl. $= \frac{6}{5}$ fl. und es verhält sich

$5\,(1\text{ ℔.}) : 2\,(1\text{ ℔.}) = 5\,(\frac{3}{5}\text{ fl.}) : 2\,(\frac{3}{5}\text{ fl.}) = 3\text{ fl.} : 1\frac{x}{5}\text{ fl.}$

Da hier die 3 Glieder nur in so weit zur Erzeugung des gesuchten Gliedes beitragen, als sie reine Zahlen sind, so ver-

fährt man bei Auffindung des gesuchten Gliedes auch nach folgender Regel:

1) Führe alle 4 Glieder auf reine Zahlen zurück;

2) multiplizire, wenn ein Außenglied gesucht ist, die Mittel-, ist ein Mittelglied gesucht, die Außenglieder, und dividire dieses Produkt im ersten Fall durch das bekannte Außen-, im andern Fall durch das bekannte Mittelglied;

3) dieser Zahl gib die Benennung des Verhältnißgliedes von dem gesuchten Gliede.

Z. B. oben war: 5 ℔. : 2 ℔. = 3 fl. : x fl.

so ist hier $5 : 2 = 3 : x$

also nach 2) $\frac{2 \cdot 3}{5} = x$

Folglich, da Gulden gesucht sind, die gesuchte Größe $\frac{6}{5}$ fl.

Diese Regel nennt man gewöhnlich die Regeldetri d. h. von dreien, nämlich gegebenen Gliedern.

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes und die manchfachen Anwendungen, die sich davon machen lassen, siehe im Abschnitt von den Gleichungen.

Zehnter Abschnitt.

Von den Potenzen.

204) Ein Produkt aus einander gleichen Factoren heißt man eine Potenz dieses Factors und zwar die so vielste, als es Factoren hat.

Da z. B. $3.3.3 = 27$, so heißt 27 die 3te Potenz von 3.
Da $2.2.2.2.2 = 32$, so heißt 32 die 5te Potenz von 2.

Der gleiche Factor heißt Grundzahl der Potenz, die Zahl, welche angibt, wie viel Factoren vorkommen, Exponent. So heißt also im 2ten Beispiel 2 die Grundzahl, 5 der Exponent der Potenz 32. Jede Potenz, z. B. 3.3.3.3 oder 81, hängt nur ab von dem gleichen Factor 3 und der Anzahl der Factoren 4; sie wird also durch diese zwei Zeichen kürzer

so bezeichnet: 3^4, sprich: 3 zur 4ten (nämlich Potenz, was man gewöhnlich wegläßt) oder 3 hoch 4.

So ist also $27 = 3^3$, $32 = 2^5$, $81 = 3^4$

Eben so: $7^2 = 49$, $2^6 = 64$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$

und allgemein bezeichnet

$$a^m$$

ein Produkt aus m Faktoren, deren jeder a ist.

Zusatz 1. Es erhellet hieraus, daß man sagen kann, eine Potenz entstehe so durch Multiplication aus einer andern (der Grundzahl), wie der Exponent durch Addition aus der 1 erzeugt ist.

Zusatz 2. Da das Potenziren von gegebenen Zahlen bei ganzen Exponenten nur ein wiederholtes Multipliciren ist, so bedarf seine Ausführung in bestimmten Zahlen keiner weitern Erläuterung (76).

Zusatz 3. Da $1.1.1... = 1$, so ist $1^m = 1$, d.h. 1 auf jeder beliebigen Potenz ist 1 selbst. Da $0.0.0.... = 0$, so ist $0^m = 0$, d. h. wo irgend 0 mit einem Exponenten versehen vorkäme, bezeichnete das Zeichen 0.

Zusatz 4. Man sieht zugleich, daß für gleiche ganze Zahlen gleich hohe Potenzen gleich sind, die höhere Potenz aber größer, ist als die niedrigere. Z. B. Ist $n > m$, so ist $a > a^m$, wenn a eine ganze Zahl ist, und eben so ist die Potenz der größern ganzen Zahl größer, als die gleichhohe der kleinern, d.h. ist $a > b$, so ist $a^n > b^n$.

Anmerk. Die 2te Potenz nennt man auch das Quadrat, oder die Quadratzahl, die 3te den Cubus, die 4te das Biquadrat. Z. B. 9 ist das Quadrat, 27 der Cubus, 81 das Biquadrat von 3.

205) Es ist nach dieser Erklärung:

$$a^3 . a^2 = aaa . aa = a^5 = a^{3+2}$$

$$a^2 . a^4 = aa . aaaa = a^6 = a^{4+2}$$

$$2^2 . 2^3 = (2.2) . (2.2.2) = 4 . 8 = 32 = 2^5 = 2^{3+2}$$

und allgemein $a^m . a^n = a^{m+n}$

d. h. multiplicirt man eine Potenz mit einer andern von gleicher Grundzahl, so braucht man bloß die Exponenten zu ad-

diren, um das Product anzuzeigen (bei der wirklichen Rechnung, die Grundzahl mit der Summe der Exponenten zu potenziren).

Hat man eine Zahl mit einer Summe zu potenziren, so kann man sie mit den einzelnen Summanden potenziren und diese Potenzen multipliciren.

Beispiele:

$2^3 . 2^2 . 2^4 = 2^9$; denn $8 . 4 . 16 = 512$

$3^3 . 3^2 = 3^5$; denn $27 . 9 = 243$

$5^2 . 5^3 . 5^{2^0} = 5^7$; denn $25 . 125 . 25 = 78125$

206) Es ist $\frac{2^5}{2^2}$ (nach 204) $= \frac{2 . 2 . 2 . 2 . 2}{2 . 2}$ (nach 137, 3)

$= 2 . 2 . 2 = 2^3$ (nach 204); aber, da $3 = 5 - 2$, so kann man auch setzen $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2}$

Eben so ist $\frac{a^6}{a^3} = \frac{aaaaaa}{aaa} = aaa = a^{6-3}$

und so kommt allgemein:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

d. h. Wenn man eine Potenz durch eine andere von gleicher Grundzahl zu dividiren hat, so kann man den Exponenten des Divisors von dem des Dividenden abziehen und mit dem Rest die Grundzahl potenziren (oder im Zeichen den Unterschied beider als Exponenten setzen).

Umgekehrt: ist der Exponent einer Potenz ein Unterschied, so ist sie einem Quotienten zweier Potenzen derselben Grundzahl gleich, dessen Dividend den Minuenden, dessen Divisor den Subtrahenden des Unterschieds zum Exponenten hat.

Anmerk. In jeder Gleichung, wie $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ läßt sich annehmen, daß eben sowohl die linke Seite $\frac{a^m}{a^n}$ aus der rechten a^{m-n} als umgekehrt die rechte aus der linken entstanden sei; den ersten Fall drückt hier der zweite, den zweiten der erste Satz aus. Vergl. Abschn. 2. §. 5. und Abschnitt VII.

Beispiele:

$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$; denn $^2\frac{4}{9}^3 = 27$

$\frac{4^4}{4^2} = 4^{4-2} = 4^2$; denn $^2\frac{5}{16}^6 = 16.$

$\frac{9^4}{9^2} = 9^{4-2} = 9^2$; denn $^6\frac{5}{81}^6 = 81.$

Zusatz 1. Hiernach ist $\frac{2^5}{2^4} = 2^{5-4} = 2^1$

Es ist aber auch $\frac{2^5}{2^4} = \frac{2.2.2.2.2}{2.2.2.2} = 2$

Folglich $2^1 = 2$

Eben so $\frac{a^{m+n}}{a^m} = a^{m+1-m} = a^1 = a$

d. h. Jede Zahl kann man als erste Potenz von ihr selbst betrachten.

Zusatz 2. Es ist $\frac{2^4}{2^4} = 2^{4-4} = 2^0$ (nach 206)

Aber auch $\frac{2^4}{2^4} = \frac{2.2.2.2}{2.2.2.2} = 1$ (nach 102)

Eben so $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$

d. h. das Zeichen a^0 bezeichnet dasselbe, was 1, oder, wo irgend a^0 vorkommt, kann man 1 setzen und umgekehrt

Zusatz 3. Da nach (206) $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{0-2} = a^{-2}$ (nach 68);

aber auch $\frac{a^3}{a^5} = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$ (nach 137, 3);

so kann man setzen $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

oder allgemein $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

d. h. eine Potenz mit negativem Exponenten bezeichnet einen Quotienten, dessen Zähler 1, dessen Nenner dieselbe Potenz mit positivem Exponenten ist.

Daher ist $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)} = a^n$ (nach 138)

$$\frac{1}{a^{-5}} = a^5, \quad a^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-5}}\right)}$$

Man kann daher jede Potenz mit entgegengesetztem Zeichen des Exponenten aus dem Nenner eines Bruches als Factor in den Zähler desselben setzen und umgekehrt. Z. B.

$$\frac{a^3}{b^{-2}} = a^3 . b^2, \quad \frac{a^{-3}}{b^2} = \frac{1}{a^3 . b^2}$$

Denn $\frac{a^3}{b^{-2}} = a^3 . \frac{1}{b^{-2}} = a^3 . b^2$; $\frac{a^{-3}}{b^2} = \frac{1}{a^3} . \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^3 b^2}$ (144 und 146)

Eben daher ist dann $\frac{a^3}{a^{-2}} = a^3 . a^2 = a^5$, $\frac{a^{-3}}{a^2} = \frac{1}{a^3 . a^2} = \frac{1}{a^5}$

$$\frac{ab}{a^{-2} . c} = \frac{a . a^2 b}{c} = \frac{a^3 b}{c} \text{ (Z. 1.)}$$

Zusatz 4. Ueberhaupt kann man, wenn im Dividenden und Divisor eines Quotienten Potenzen derselben Grundzahl als Factoren vorkommen, in diesen die Exponenten um Gleiches vermehren oder vermindern, um die Multiplication oder Division durch dieselbe Zahl anzuzeigen (137, 3).

Z. B. $\frac{4^3}{4^4} = \frac{1 . 4^3}{4 . 4_3}$ (nach 205) $= \frac{1}{4}$ (nach 137, 3)

oder kürzer $\frac{4^3}{4^4} = \frac{4^{3-3}}{4^{4-3}} = \frac{4^0}{4^1} = \frac{1}{4}$ (Z. 1. und 2.)

Daher auch: $\frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m}$, $\frac{a^m}{a^{n+m}} = \frac{1}{a^n}$, $\frac{a^5 b^2}{ab^3} = \frac{a^4}{b}$

$$\frac{a^7 . b^3 c^2}{a^5 . b . c} = a^2 . b^2 . c, \quad \frac{a^{-m}}{a^{n+m}} = \frac{1}{a^{n+2m}}$$

$$\frac{a^{-5} . b^{-3}}{a^{-2} . b^{-7}} = \frac{b^{7-3}}{a^{5-2}} = \frac{b^4}{a^3}, \quad \frac{a^{-m} . b^{-1}}{a^{-n} . b^{-2}} = a^{n-m} . b$$

$$\frac{a^{-11} . b^{-5}}{a^{-3} . b^{-2}} = \frac{1}{a^{11-3} . b^{5-2}} = \frac{1}{a^8 . b^3}$$

$$\frac{\left(\frac{a^5}{b^2}\right)}{b^3} = \frac{a^5}{b^5} \text{ (nach 137, 2)}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{a^3}{b^{-2}} = \frac{a^4}{b^{-1}} = a^4 b$$

$\frac{a}{3} \cdot \frac{3^a}{a} = 3$, $\frac{5^7}{9^3} \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{9^6}{5^2} = 5^5 \cdot 9$ (nach 146)

Anmerk. 1. Die Zeichen in Zuf. 1, 2, 3, bezeichnen allerdings keine Verbindungen von Zahlen, welche für sich allein und unabhängig von andern dargestellt werden könnten. Denn weder ist a^1, noch a^0, noch a^{-2} ein Product, das sich ausführen ließe. Es wird dieß aber auch nicht verlangt; sondern wie diese Formen durch richtige Umformung richtiger Zeichen entstehen, so haben sie auch nur in Verbindung mit andern eine denkbare, nämlich die angegebene Bedeutung.

Es ist also:

$a^0 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot a^1 = 1 \cdot aaa \cdot aa \cdot a = a^6$

aber auch $a^{0 + 3 + 2 + 1} = a^6$

$2^0 \cdot 2^3 \cdot 2^1 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 2^{0 + 3 + 1}$

$2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^1 \cdot 2^0 = \frac{1}{2^2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2$

aber auch $= 2^{-2 + 3 + 1 + 0} = 2^2$

$2^{-3} \cdot 2^{-5} \cdot 2^1 \cdot 2^7 = \frac{2^1 \cdot 2^7}{2^3 \cdot 2^5} = 1$

Anmerk. 2. Legt man die in (204, Z. 1.) gegebene Erklärung des Potenzirens zum Grunde, so lassen sich a^0, a^1, a^{-n} aus derselben so ableiten:

1) a^1 soll so durch Multiplication aus a erzeugt werden, wie 1 durch Addition aus 1 erzeugt ist: es kann also nur an sich selbst gesetzt werden.

2) a^0: 0 entsteht aus 1 dadurch, daß man 1 von 1 abzieht; da nun a^0 eben so durch Multiplication aus a entstehen soll, so muß es so erzeugt werden, daß man a durch a dividirt (s. Abschn. VII.) dieß gibt $\frac{a}{a} = 1$, also ist $a^0 = 1$.

3) a^{-n}; $-n$ entsteht durch Addition aus 1 dadurch, daß man n Einer als Subtrahenden (oder negativ) setzt. Da nun a^{-n} eben so aus a durch Multiplication entstehen soll, so erhellet, daß man hier gar nicht zu multipliciren, sondern vielmehr a nmal als Divisor zu setzen habe, wodurch man erhält:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

207) Auch folgende Formen sind nun verständlich nach 205 und 206.

$a^m . a^{-n} = a^{m-n}$; $a^3 . a^2 . a^{-4} = a^{3+2-4} = a$

$2 . 2^{-2} . 3 . 3 . 5^{-1} . 5^{-2} = 2^{1-2} . 3^2 . 5^{-1-2} =$

$$2^{-1} . 3^2 . 5^{-3} = \frac{3^2}{2 . 5^3}$$

$5 . a^2 . 3 . a^{-1} . a^5 . 15 = 15^2 . a^6$; $a^{-2} . a^{-3} . 3 . a^5 = 3$

$3 . 7^{-9} . 7^{-2} . 4 . 7^8 = \frac{12}{343}$; $\frac{12a^3b^5}{6a^2b} = 2ab^4$

$\frac{a^2}{b^3} \cdot \frac{a^{-2}}{b^{-3}} = 1$; $\frac{2^3 . a^{-2} . b}{2^5 . a^3 . b^2} = \frac{1}{4a^5 b}$

$$\frac{1}{3a^{-3} b^{-m} . c} \cdot \frac{1}{4a^{-p} b} = \frac{a^{3+p} b^{m-1}}{12c}$$

$\frac{2\frac{4}{5} a^{-8}}{-3a} = \frac{\frac{14}{5}}{-3a^9} = -\frac{14}{15a^9}$ (nach 155, 5)

$\frac{-\frac{1}{2} a^2 b^{-2}}{\frac{3}{5} a^3 b} = -\frac{5}{6ab^3}$ (nach 155, 4)

$\frac{-\frac{3}{5} a^3 b^2}{-\frac{2}{3} a^2 b^5} = \frac{9}{10} ab^{-3} = \frac{9a}{10b^3}$ (nach 155, 6)

$\frac{2\frac{4}{5} a^{-5}}{3a} = \frac{14}{15a^6}$

$$\frac{\frac{3a^3 d}{2b^5}}{\frac{b^3}{4a^2 c^7}} = \frac{3a^3 d}{2b^5} \cdot \frac{4a^2 c^7}{b^3} = \frac{6a^5 c^7 d}{b^8}$$

$$\frac{5\frac{1}{2}}{\left[\frac{3\frac{2}{3} a^3 b^5}{6c^{-2}}\right]} = \frac{5\frac{1}{2} . 6 . c^{-2}}{3\frac{2}{3} a^3 b^5} = \frac{9}{a^3 b^5 c^2}$$

208) Es ist $3^2 . 2^2 = 3 . 3 . 2 . 2 = (3 . 2) . (3 . 2)$
(nach 76) $= (3 . 2)^2$ (nach 204)

$a^3 . b^3 = aaa . bbb = (ab)\ (ab)\ (ab) = (ab)^3$

Daher: $a^n . b^n = (ab)^n$ und $a^n . b^n . c^n = (abc)^n$

d. h. Hat man Potenzen von gleichen Exponenten zu multipliciren, so multiplicire man ihre Grundzahlen und gebe dem Product den gemeinschaftlichen Exponenten der Factoren (bei der wirklichen Berechnung: potenzire mit dem gemeinschaftlichen Exponenten).

Umgekehrt: Soll man ein Product potenziren, so potenzire man die einzelnen Factoren und multiplicire diese einzelnen Potenzen.

209) Es ist $\frac{4^3}{2^3} = \frac{4.4.4}{2.2.2}$ (nach 204) $= \frac{4}{2}.\frac{4}{2}.\frac{4}{2}$ (nach 148. 3.) $= (\frac{4}{2})^3$ (nach 204)

oder $\frac{a}{b^2} = \frac{aa}{bb} = \frac{a}{b}.\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

Daher allgemein $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

D. h. soll man eine Potenz durch eine andere von gleichem Exponenten dividiren, so dividire man die Grundzahl durch die Grundzahl und potenzire den Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Exponenten.

Soll man einen Quotienten potenziren, so potenzire man Dividend und Divisor und dividire die erste Potenz durch die letzte.

Beispiele.

$(\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}$; $(\frac{8}{7})^2 = \frac{64}{49}$;

$(\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{125}$; $(\frac{3}{8})^3 = \frac{27}{512}$; $(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$

$(1\frac{1}{4})^2 = (\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}$; $(4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3})^2 = (3\frac{1}{6})^2 = (\frac{19}{6})^2 = \frac{361}{36}$;

$\left(\frac{4\frac{1}{2}}{5}\right)^3 = (\frac{9}{10})^3 = \frac{729}{1000}$; $(\frac{3}{4}.\frac{5}{3})^2 = (\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{4}$

$\frac{5a^2}{7b^2} = \frac{5}{7}\left(\frac{a}{b}\right)^2$

210) Nach (204) ist $(3^2)^3 = 3^2.3^2.3^2 = (3.3)(3.3)(3.3) = 3.3.3.3.3.3 = 3^6 = 3^{2\cdot3}$

Eben so: $(2^3)^2 = 2^3.2^3 = (2.2.2).(2.2.2) = 2.2.2.2.2.2 = 2^{3\cdot2}$

Daher allgemein: $(a^m)^n = a^{m.n}$ und $([a^m]^n)^p = a^{m.n.p}$

D. h. Eine Potenz wird potenzirt, wenn man den Potenzexponenten multiplicirt (und mit dem Product potenzirt).

Ist mit einem Product zu potenziren, so kann man mit den einzelnen Factoren desselben nach einander potenziren.

Beispiele:

$(5^3)^2 = 5^6$; $(6^7)^2 = 6^{14}$;

$([5^3]^3)^2 = 5^{18}$; $([3^4]^2)^7 = 3^{56}$

Zusatz. Da man die Factoren jedes Products in willkührlicher Ordnung multipliciren darf, so ist

$$(a^m)^n = a^{m.n} = a^{n.m} = (a^n)^m$$

d. h. wenn mit einem Product zu potenziren ist, so darf man mit den einzelnen Factoren desselben in willkührlicher Ordnung potenziren.

Es ist also auch $([a^3]^5)^2 = ([a^5]^2)^3$ u. s. w.

211) Diese Sätze in Verbindung mit den frühern der Addition und Subtraction, Multiplication und Division erläutern folgende Umformungen.

1) $ab^n + 2cb^n + 3db^n = (a+2c+3d)\,b^n$ (S. 84.)

2) $10a^5 + 7a^5 - 9a^5 - 13a^5 = -5a^5$

3) $10a^6 + 5a^5 - 3a^5 = (10a + 5 - 3)\,a^5 = (10a + 2)\,a^5$ (S. 205.)

4) $7a^9 - 5a^8 - 2a^7 = (7a^2 - 5a - 2)\,a^7$

5) $3 . 2^{-7} + 5^6 - 8 . 2^{-7} + 3a^n . b^{-m} + 15 . 5^6 - 4a . 2^{-7} + 6a^n . b^{-m} = -(5+4a)\,2^{-7} + 16 . 5^6 + 9a^n\,b^{-m}$

6) $5a^4 - 7a^3\,b^2 - 3c^{-1}\,d^2 - (3a^4 - 15a^3\,b^2 - 7c^{-1}\,d^2) = 2a^4 + 8a^3\,b^2 + 4c^{-1}\,d^2$

7) $-7a^{-1}\,b^4 . c^{-5} . (-3a^2\,b^{-5}\,c) = 21ab^{-1}\,c^{-4} = \frac{21a}{bc^4}$

8) $\frac{-1}{3a^{-m} . b^{-n}} \cdot \frac{1}{5a^m . b^5} = -\frac{1}{15b^{5-n}}$

9) $-8a^4\,b^{-5}(7a^{-5}\,b + \frac{2b^3}{a^4} - 3a^{-3}\,b^2\,c + 7) = \frac{24ac}{b^3}$

$-\frac{56}{ab^4} - \frac{56a^4}{b^5} - \frac{16}{b^2}$

10) $(4a^2 - 16ax + 3x^2)\,(5a^3 - 2a^2x) = 20a^5 - 80a^4x + 15a^3x^2 - 8a^4x + 32a^3x^2 - 6a^2x^3 = 20a^5 - 88a^4x + 47a^3x^2 - 6a^2x^3$

11) $(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)\,(a + 2b) = a^5 + 32b^5$

12) $(7a^3b^5 - 3c^2 . d^{-2})\,(7a^3b^5 + 3c^2d^{-2}) = 49a^6b^{10} - 9c^4\,d_4^-$

13) $\left(\frac{a^2}{b^3} + \frac{2c^3d^4}{b^5} - \frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)\left(\frac{a^2}{b^3} - \frac{2c^3d^4}{b^5} + \frac{7c^2}{2a^4b^3}\right) = \frac{a^4}{b^6} - \frac{4c^6d^8}{b^{10}} + \frac{14c^5d^4}{a^4b^8} - \frac{49c^4}{4a^8b^6}$

14) $(a^2 + ab + b^2)\,(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$

15) $\frac{12a^4b^2 - 10a^3c + 7a^4bc}{2a^2} = 6a^2b^2 - 5ac + \frac{7}{2}a^2bc$

16) $\frac{\frac{3}{4}a^2b^6 - 5ab^{-7}c + 2a^3c^2}{\frac{2}{3}a^5b^2c^{-1}} = -\frac{9b^4c}{8a^3} + \frac{15c^2}{2a^4b^9} - \frac{3c^3}{a^2b^2}$

17) $\frac{\frac{2a^8b}{b^3c^2} - \frac{2d^4f}{b^4c} + \frac{6bc^{m-2}d}{k^3}}{2bc^{-2}d} = a^3b^{-4} - cb^{-5}d^3f + \frac{3c^m}{k^3}$

18) $\frac{a^{4m+1}b^{3m+2} - 6a^{2m+5}b^{p+m-1} + a^{3m+3}b^{-1}}{a^{3m+2}b^{m-1}} =$

$a^{m-1}b^{2m+3} - 6a^{3-m}b^p + ab^{-m}$

19) $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$, oder $= \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}}$

20) $([a^m]^{-3})^{-5} = a^{15m}$

21) $([a^3b^2c]^2)^3 = a^{18}b^{12}c^6$

22) $([a^{-2}.b^{-3}]^3)^2 = a^{-12}.b^{-18} = \frac{1}{a^{12}.b^{18}}$

23) $\left(\frac{a^{-2}b}{c^{-3}}\right)^3 = \frac{b^3c^9}{a}$

24) $(-a)^2 = (-a)(-a) = a^2$

25) $(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3$

26) $(-a)^{2n} = ([-a]^2)^n = (a^2)^n = a^{2n}$

27) $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n}.(-a) = a^{2n}.(-a) = -a^{2n+1}$

28) $([-a]^4)^3 = a^{12}$

29) $(-a)^7 = -a^7$

30) $(-a)^{-2} = \frac{1}{(-a)^2} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$

31) $(-a)^{-2n} = a^{-2n}$

32) $(-a)^{-(2n+1)} = -a^{-(2n+1)}$

33) $\frac{a^7 - 6a^6b^3 - 33a^3b^2 + 14a^2b^3}{a^3 - 2a^2b^3} = ?$

Anmerk. Hier läßt sich gerade so verfahren, wie oben (256) gelehrt worden. Z. B.

34) $\frac{3c}{5b} - \frac{7b}{6a} + \frac{8a}{3b} \Big| - \frac{21c^2}{10b^2} + \frac{55c}{12a} - \frac{35b^2}{36a^2} - \frac{533ac}{60b^2} + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{97}{72} \Big| - \frac{7c}{2b} + \frac{5b}{6a} + \frac{3a}{4b}$

$$\underline{- \frac{21c^2}{10b^2} + \frac{40c}{12a} \qquad - \frac{28ac}{3b^2}}$$

$$\frac{c}{2a} - \frac{35b^2}{36a^2} + \frac{9ac}{20b^2} + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{97}{72}$$

$$\underline{\frac{c}{2a} - \frac{35b^2}{36a^2} \qquad + \frac{160}{72}}$$

$$+ \frac{9ac}{20b^2} + \frac{2a^2}{b^2} - \frac{63}{72}$$

$$\underline{+ \frac{9ac}{20b^2} + \frac{2a^2}{b^2} - \frac{63}{72}}$$

$$0$$

Für die erste Division hätte man:

$$\frac{- \frac{21c^2}{10b^2}}{\frac{3c}{5b}} = - \frac{21c^2 \cdot 5b}{10b^2 \cdot 3c} = - \frac{7c}{2b}$$

Für die zweite: $\frac{\frac{c}{2a}}{\frac{3c}{5b}} = \frac{c \cdot 5b}{2a \cdot 3c} = \frac{5b}{6a}$

Für die dritte: $\frac{\frac{9ac}{20b^2}}{\frac{3c}{5b}} = \frac{9ac \cdot 5b}{20b^2 \cdot 3c} = \frac{3a}{4b}$

35) $\frac{1}{12a^3b} + \frac{2}{9b^2mn} + \frac{4}{3mn} - \frac{2a^2c}{3m^2n} - \frac{4a^2b^2c}{m^2n^2} - \frac{bc}{4amn}$

$$- \frac{2a}{15b^2cmn} + \frac{2a^3}{5m^2n^2}$$

Dividirt durch $\frac{1}{3abc} - \frac{ab}{mn}$ gibt: $\frac{c}{4a^2} + \frac{2ac}{3bmn} - \frac{2a^2}{5bmn} + \frac{4abc}{mn}$

36) $5a^4 + \frac{7}{2}a^3b - \frac{107}{12}a^2b^2 + \frac{5}{6}ab^3 + \frac{7}{6}b^4$

div. durch $2a^2 - ab - \frac{1}{2}b^2 = \frac{5}{2}a^2 + 3ab - \frac{7}{3}b^2$

37) $20a^5 - 88a^4x + 47a^3x^2 - 9a^2x^3$

div. durch $5a^3 - 2a^2x = 4a^2 - 16ax + 3x^2$

38) $7a^{10} - 25a^8b^2 + 48a^6b^4 - 23a^4b^6 + 5a^2b^8$

div. durch $a^6 - 3a^4b^2 + 5a^2b^4 = 7a^4 - 4a^2b^2 + b^4$

39) $\frac{a^3 - a^2}{a^2 - 1} = a^2 + a^4 + a^6$

40) $\frac{a^5 + 32b^5}{a + 2b} = a^4 - 2a^3\ b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4$

41) $\frac{1 + z^2 + z^4}{1 + z + z^2} = 1 - z + z^2$

212) Was herauskommt, wenn man zwei- und mehrtheilige Ausdrücke mit sich selbst multiplicirt (oder potenzirt), läßt sich hier noch nicht allgemein betrachten; wohl aber kann man die einzelnen Fälle, so weit man will, aus einander ableiten.

Beispiele, a) für das Quadrat.

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb = a^2 + 2ab + b^2$

oder wörtlich: das Quadrat einer zweitheiligen Summe besteht aus dem Quadrat der ersten Zahl, mehr dem doppelten Product aus der ersten Zahl in die zweite mehr dem Quadrat der zweiten Zahl.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b+c)^2 = ([a+b]+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\ c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)\ c + c^2$

$(a+b+c+d)^2 = ([a+b+c]+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2$

Man sieht hieraus, daß das Quadrat einer mehrtheiligen Summe besteht 1) aus den Quadraten aller einzelnen Glieder, 2) aus den doppelten Producten jedes einzelnen Gliedes in die Summe aller vorhergehenden. Eben so erhellet, daß das Quadrat einer Summe, die ein Glied mehr hat als eine gegebene, gleich ist dem Quadrat der gegebenen mehr dem doppelten Product aus der gegebenen Summe und dem hinzugekommenen Gliede mehr dem Quadrat dieses Gliedes; daß also für jedes Glied 2 Producte in der Potenz hinzukommen.

$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

$(a^2 + a - 1)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2 - 2(a^2 + a) + 1$

$= a^4 + 2a^3 - a^2 - a + 1$

$\left(a - x + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - 2ax + x^2 + ab - bx + \frac{b^2}{4}$

$(14)^2 = 14 \cdot 14 = 196$

$= (10+4)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 4 + 4^2 = 100+80+16 = 196$

$(217)^2 = (200+10+7)^2 = 200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 10 + 10^2 + 2 \cdot 210 \cdot 7 + 7^2$

$= 40000+4000+100+2940+49$

$= 47089$

b) für den Cubus.

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b$

$+3ab^2 + b^3$

oder wörtlich: der Cubus einer zweitheiligen Größe ist gleich dem Cubus des ersten Gliedes mehr dem dreifachen Product aus dem Quadrat des ersten Gliedes in das zweite mehr dem dreifachen Product aus dem ersten Gliede in das Quadrat des zweiten Gliedes mehr dem Cubus des zweiten Gliedes.

$(a+b+c)^3 = ([a+b]+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3$

$(a+b+c+d)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2 c+3(a+b)c^2+c^3$

$+3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$

Aus diesen Beispielen ersieht man, daß der Cubus einer vieltheiligen Summe besteht aus 1) den 3ten Potenzen aller einzelnen Glieder, 2) den 3fachen Producten jedes einzelnen Gliedes in das Quadrat der Summe aller vorhergehenden, 3) aus den dreifachen Producten des Quadrats jedes einzelnen Gliedes in die Summe aller vorhergehenden Glieder. Kommt also zu den Gliedern einer Summe ein neuer Summand hinzu, so ist der Cubus der neuen Summe gleich dem Cubus der alten mehr dem dreifachen Produkt aus dem Quadrat der alten Summe in den neuen Summanden mehr dem dreifachen Product aus der alten Summe in das Quadrat des Summanden mehr dem Cubus dieses Summanden: somit erhält der Cubus durch den neuen Summanden 3 neue Produkte.

$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

$(-a^2 + a + 1)^3 = -a^6 + 3a^5 - 5a^3 + 3a + 1$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(41)^3 = 40^3 + 3 \cdot 40^2 \cdot 1 + 3 \cdot 40 \cdot 1^2 + 1^3$

$= 64000 + 4800 + 120 + 1 = 68921 = 41 \cdot 41 \cdot 41$

$$(234)^3 = (200+30+4)^3 = 200^3 + 3 \cdot 200^2 \cdot 30 + 3 \cdot 200 \cdot 30^2$$
$$+ 30^3 + 3 \cdot 230^2 \cdot 4 + 3 \cdot 230 \cdot 4^2 + 4^3$$

$$= 8000000$$
$$3600000$$
$$540000$$
$$27000$$
$$634800$$
$$11040$$
$$64$$
$$12812904 = 234 \cdot 234 \cdot 234$$

Vermischte Beispiele:

1) $\left(\frac{a}{b} - \frac{2b}{3c}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}$

2) $\left(3x - 5a - \frac{a^2}{2}\right)^2 = 9x^2 - 30ax - 3a^2x + 25a^2 + 5a^3 + \frac{a^4}{4}$

3) $\left(\frac{a-b}{x^2+2a}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{x^4+4ax^2+4a^2}$

4) $(2a-7x)^3 = 8a^3 - 84a^2x + 294ax^2 - 343x^3$

5) $\left(\frac{acx^2}{b} - \frac{bx}{c}\right)^3 = \frac{a^3c^3x^6}{b^3} - \frac{3a^2cx^5}{b} + \frac{3abx^4}{c} - \frac{b^3x^3}{c^3}$

6) $2{,}03^2 = 4{,}1209$

7) $2{,}03^3 = 8{,}365427$

8) $0{,}978^3 = 0{,}956484$

9) $0{,}978^3 = 0{,}935441352$

10) $34{,}65^3 = 41601{,}569625$

11) $989{,}1^2 = 958636{,}81$

12) $0{,}8495^3 = 0{,}613041887375$

Für höhere Potenzen:

13) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

14) $(a+b+c)^4 = ?$

15) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

16) $(a+b+c)^5 = ?$

17) $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

18) $(a+1)^5 = ?$

Eilfter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

213) Die Zahl, welche zu einer gewissen Potenz erhoben, eine andere gibt, heißt Wurzel von dieser und zwar die so vielste, als der Potenzexponent angibt. Z. B. ist $5^2 = 25$, so heißt 5 die 2te Wurzel von 25. So ist 7 die 4te Wurzel aus 2401; die Potenz heißt in Beziehung auf die Wurzel Radikand, d. h. Zahl, aus welcher die Wurzel gesucht ist. So ist z. B. 25 der Radikand, wenn 5 die 2te Wurzel ist. Der Exponent 2 heißt hier Wurzelexponent.

Das Zeichen, daß man aus einer Zahl die Wurzel zu nehmen habe, ist V, welches in seiner obern Oeffnung den Wurzelexponenten, rechts den Radikanden enthält. Z. B. $\sqrt[3]{8}$ bezeichnet die 3te Wurzel aus 8 oder 2; $\sqrt[5]{32}$ die fünfte Wurzel aus 32 oder 2. Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken bezeichnet man entweder, indem man den Radikanden einklammert, oder indem man das Wurzelzeichen durch einen Querstrich über ihn hin verlängert. Z. B. $\sqrt[2]{27 - 2}$ oder

$$\sqrt[2]{(27-2)} = \sqrt[2]{25} = 5, \quad \sqrt[3]{28a^3 - a^3} = \sqrt[3]{(28a^3 - a^3)} = \sqrt[3]{27a^3}$$

Anmerk. Die Wurzel des zweiten Grades heißt man auch Quadratwurzel, die Wurzel des dritten, Cubikwurzel. Bei der Quadratwurzel läßt man meist die Angabe des Exponenten weg. Z. B. $\sqrt{4}$ soll eben so viel bedeuten wie $\sqrt[2]{4}$

214) Hieraus ergibt sich sogleich:

1) gleichvielste Wurzeln gleicher ganzer Radicanden sich gleich. D. h. ist $a = b$, $m = n$, so ist $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b}$

2) die höhere Wurzel aus demselben Radicanden ist kleiner, als die niedrigere. Ist $m > n$, so ist $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ + Z. B. $\sqrt[4]{256} < \sqrt[2]{256}$ d. h. $4 < 16$.

3) Eine Wurzel aus größerem Radikanden ist größer, als die gleichhohe aus kleinerem. Ist $a > b$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ z. B. $\sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8}$. Es ist auch $3 > 2$.

215) Für eine gegebene Zahl die Wurzel suchen, heißt man Wurzelausziehen, z. B. aus 8 die 3te oder Cubikwurzel ausziehen. Man kann nur dann die Wurzel angeben, wenn man vorher weiß, welche Zahlen mit sich selbst multiplicirt (d. h. potenzirt) die Zahl geben.

z. B. die 3te Wurzel aus 8 ist 2 oder

$\sqrt[3]{8} = 2$, weil $2^3 = 8$,

$\sqrt[5]{32} = 2$, weil $2^5 = 32$

$\sqrt[4]{81} = 3$, weil $3^4 = 81$

$\sqrt[2]{1} = 1$, weil $1^2 = 1$

$\sqrt[3]{1} = 1$, weil $1^3 = 1$

$\sqrt[n]{1} = 1$, weil $1^n = 1$

Zusatz. Von einer zweiten Wurzel aus 7, 8, 10 läßt sich eigentlich gar nicht reden, da es keine Zahl gibt, die mit sich selbst multiplicirt, 7, 8, 10 erzeugte. Solche Wurzeln heißen dann irrationale Zahlen, wogegen z. B. $\sqrt[3]{8}$ rational heißt, d. h. in ganzen Zahlen angeblich $= 2$ (193). Die ersten Zahlen, welche rationale Wurzeln haben, kann man in folgender Tafel zusammenstellen und zum Behuf anderer Rechnungen im Gedächtniß behalten.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadratzahlen.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubikzahlen.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Anmerk. Es tritt beim Wurzelausziehen dasselbe Verhältniß gegen das Potenziren ein, wie beim Dividiren gegen das Multipliciren statt findet und wie man z. B. für den Divisor 9 die Zahl 3 den nächsten Quotienten von 28 nennt; wobei der Rest 1 ist, so heißt man auch z. B. von 27 die Zahl 5 die nächst größte Quadrat-, die Zahl 2 die nächst größte ganzzahlige Cubikwurzel. So ist 7 die nächst größte Quadratwurzel von 50, 3 die nächst größte Cubikwurzel von 30, die sich in ganzen Zahlen angeben läßt.

216) Da überhaupt das Wurzelausziehen das Potenziren voraussetzt, so kann man auch aus mehrzifferigen Zahlen nur dadurch die Wurzel finden, daß man die Sätze vom Potenziren mehrzifferiger Wurzeln näher betrachtet. Hier findet man

1) daß eine Zahl mit Nullen rechts in der 2ten Potenz doppelt, in der 3ten 3 mal so viel Nullen hat, als in der Wurzel (93. Z. 6.). Z. B.

$50^2 = 5^2 \cdot 100 = 2500$

$700^2 = 7^2 \cdot 10000 = 490000$

$10^3 = 1^3 \cdot 1000 = 1000$

$2000^3 = 2^3 \cdot 1000^3 = 8000000000$

2) Da überhaupt

$10^2 = 100$ $\quad$ $10^3 = 1000$

$100^2 = 10000$ $\quad$ $100^3 = 1000000$

$1000^2 = 1000000$ $\quad$ $1000^3 = 1000000000$

u. s. f. $\quad$ u. s. f.

so sieht man

a) für die 2te Potenz, daß, da die kleinste 2, 3, 4... zifferige Zahl auf der 2ten Potenz die kleinste 3, 5, 7... zifferige Zahl gibt, die 2ten Potenzen der einzifferigen Zahlen 1 oder 2 zifferig,

der 2 zifferigen Zahlen 3 oder 4 ziff.

— 3 — — 5 — 6 ziff.

also — n — — 2n—1 oder 2n zifferig sein können, daß also umgekehrt eine 1 oder 2 zifferige Zahl als 2te Wurzel nur eine 1 zifferige Zahl, eine 3 oder 4 zifferige nur eine 2 zifferige Wurzel und eine n ziff. Zahl nur eine Wurzel haben könne von so viel Stellen,

als man erhält, wenn man bei einem geraden n diese Zahl n selbst, bei einem ungeraden die Zahl n+1 durch 2 theilt.

Z. B. ist die Anzahl der Stellen in der Zahl 5, so hat die Quadratwurzel $\frac{5+1}{2} = 3$ Ziffern, wie oben.

Um also aus der Anzahl der Stellen der 2ten Potenz die Anzahl der Stellen der Wurzel zu finden, so hat man die Regel: Man theile die Ziffern der gegebenen Zahl in Klassen von zwei Ziffern von rechts nach links ab, so hat die Wurzel so viel Ziffern, als Klassen sich ergeben. Dabei darf die letzte Klasse links auch 1 Ziffer haben.

Z. B. 70,00,66,89 kann zur 2ten Wurzel nur eine 4 zifferige Zahl haben, denn die kleinste 5 zifferige Zahl oder 10000 gibt schon zur 2ten Potenz 100000000.

b) Für die 3te Potenz ist, weil die 3ten Potenzen der kleinsten 2, 3, 4 .... zifferigen Zahlen die kleinsten 4, 7, 10 .... zifferigen Zahlen geben,

der Cubus der 1 zifferigen Zahlen 1 bis 3 zifferig
— — 2 — — 4 bis 6 —
— — 3 — — 7 bis 9 —
— — n — — (3n—2) bis 3n zifferig.

Umgekehrt hat also eine 1—3 zifferige Zahl zur 3ten Wurzel eine 1 ziff. Zahl; eine 4—6 ziff. Zahl eine 2 ziff. 3te Wurzel. Von einer n zifferigen Zahl ist also die 3te Wurzel entweder $\frac{n}{3}$ oder $\frac{n+1}{3}$ oder $\frac{n+2}{3}$ zifferig, je nachdem n um 1 oder 2 von einer durch 3 theilbaren Zahl unterschieden ist.

Z. B. für eine 10 ziff. Zahl ist die 3te Wurzel $\frac{10+2}{3}$ = 4 ziff., wie oben.

Um also aus der Anzahl der Stellen der 3ten Potenz die der Wurzel zu finden, hat man folgende Regel: Man theile die Ziffern der gegebenen Zahl in Klassen von 3 Ziffern von rechts nach links ab, so hat die 3te Wurzel so viel Ziffern, als man Klassen erhält. Die letzte Klasse links kann 3, 2 oder 1 Ziffer haben.

z. B. 2,460,375 kann zur Cubikwurzel nur eine 3zifferige Zahl haben, denn die kleinste 4 zifferige Zahl oder 1000 gibt zur 3ten Potenz schon 1000000000.

217) Weiß man aber, wie viel zifferig die Wurzel einer gegebenen Zahl sei, so kann man nach (212) angeben, auf welche Weise die gegebene Zahl aus den Summanden ihrer Wurzel erzeugt sein muß. Nimmt man für diese Untersuchung die Buchstaben a, b, c... in der eingeschränkten Bedeutung, daß sie nur statt der Ziffern von 1...9 stehen, so läßt sich eine mehrzifferige Zahl durch abcd... bezeichnen. Es sei also abcd = a000 + b00 + c0 + d, so ist $(abcd)^2$ oder z. B. $(2345)^2 = 5499025$

a000 . a000 =	$a^2$000000	$2^2$000000 =	4000000
2.a000.b00 =	2(a.b)00000	2(2.3)00000 =	1200000
b00 . b00 =	$b^2$0000	$3^2$0000 =	90000
2ab00 . c0 =	2(ab)c000	2(23) . 4000 =	184000
c0 . c0 =	$c^2$00	$4^2$00 =	1600
2(abc)0 d =	2(abc)d0	2(234) . 50 =	23400
d^2 =	d^2	5^2 =	25
			5499025

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß jedes folgende Theilproduct der Summe rechts eine Null weniger hat, daß also z. B. das Quadrat von 2000 oder 4000000 zusammengehalten mit der Quadratzahl selbst nicht auf alle Ziffern derselben Einfluß haben, vielmehr nur enthalten sein kann in 5000000, ohne daß die übrigen Ziffern des Quadrats 5499025 von demselben abhiengen. Das doppelte Product aus den Tausenden und Hunderten oder 2(ab)00000 hat wegen 1000.100 5 Nullen; hängt also von den 5 letzten Stellen der gegebenen Quadratzahl nicht ab und so bezieht sich jeder folgende Theil des Quadrats auf eine Stelle weiter rechts in der Quadratzahl, bis endlich das Quadrat der Einer in der Wurzel blos Einer gibt, folglich mit der letzten Stelle rechts der Quadratzahl zusammenhängt.

218) Hat man also aus der Zahl 5499025 die Quadratwurzel auszuziehen, so verfahre man nach folgender Regel:

1) theile die Zahl in Klassen von 2 Ziffern von rechts nach links, so gibt die Klassenzahl, die Anzahl der Stellen der Wurzel an (215);

2) suche nach (212, a) die Formel für die 2te Potenz einer so vieltheiligen Summe, so gibt diese die Producte an, welche das Quadrat bilden, somit nacheinander von dem gegebenen Quadrat auf folgende Weise abzuziehen sind, um die verlangte Wurzel zu finden.

a) Die höchste Klasse des Quadrats enthält das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel. Diese findet man wenigstens als nächst größte ganzzahlige Wurzel aus der Tafel (215) und setzt sie rechts an, wie den Quotienten bei der Division; zieht man das Quadrat dieser Zahl ab und nimmt man den etwaigen Rest zu den Einheiten der folgenden Stelle, oder setzt man die folgende Stelle des Quadrats zum Rest herab, so enthält die so entstandene Zahl das doppelte Product aus der gefundenen ersten Ziffer der Wurzel in die zweite;

b) dividirt man also mit der doppelten ersten Zahl der Wurzel diese Zahl der Potenz, so gibt der Quotient die zweite Ziffer der Wurzel. Man ziehe dieses doppelte Product der ersten und zweiten Zahl der Wurzel ab, und nehme den Rest zur folgenden Ziffer rechts in der Potenz, oder setze diese Stelle zum Rest herab: so enthält diese Zahl das Quadrat der 2ten Ziffer;

c) ziehe dieses Quadrat der 2ten Ziffer ab, und nimm den allenfalsigen Rest, zur folgenden Ziffer rechts, so muß in dieser Zahl das doppelte Product aus dem Betrag der 2 ersten Ziffern und der dritten enthalten sein;

d) dividirt man also diese Zahl mit dem doppelten Betrag der beiden ersten Ziffern, so ist der Quotient die dritte Ziffer der Wurzel, das doppelte Product dieser Zahl in den Betrag der beiden ersten ziehe ab und nimm den Rest zur folgenden Stelle rechts, so enthält die hierdurch entstehende Zahl das Quadrat der dritten Ziffer.

e) ziehe das Quadrat der dritten Ziffer ab und nimm den Rest zur folgenden Ziffer rechts, so enthält die hierdurch entstehende Zahl das doppelte Product aus dem Betrag der drei ersten Ziffern und der 4ten;

f) dividire also die Zahl mit dem doppelten Werth der drei ersten Ziffern, so ist der Quotient die 4te Ziffer der Wurzel. Ziehe das doppelte Product ab und nimm den Rest zur folgenden Stelle rechts.

g) Von der dadurch entstandenen Zahl nimm das Quadrat der 4ten Ziffer weg, so darf kein Rest bleiben, wenn die gegebene Zahl ein Quadrat war. Außerdem ist der Rest der Ueberschuß derselben über die nächst größte Quadratzahl.

$(abcd)^2$	5,49,90,25	$2000+300+40+5$
$a^2000000$	4000000	$2.2000 = 4000$
	1499025	$2.2000.300 = 1200000$
$2ab00000$	1200000	$300^2 = 90000$
	299025	$2.2300 = 4600$
b^20000	90000	$2.2300.40 = 184000$
	209025	$40^2 = 1600$
$2(ab)c000$	184000	$2.2340 = 4680$
	25025	$2.2340.5 = 23400$
c^200	1600	$5^2 = 25$
	23425	
$2(abc)d0$	23400	
	25	
d^2	25	
	—	

Also ist $\sqrt{5499025} = 2345$ *).

*) So oft $\sqrt{}$ a ohne Exponent steht, bezeichnet es so viel als $\sqrt[2]{}$ a.

Diese Rechnung läßt sich kürzer so darstellen:

```
5,49,90,25 | 2345
4          | 4
-----------
14          46
12          468
-----------
 29
  9
-----
 209
 184
-----
  250
   16
-----
 2342
 2340
-------
      25
      25
-------
       0
```

219) Bedenkt man, was (212, a) über die Bildung des Quadrats aus den Theilen der Summe gesagt ist, so sieht man, daß die für 4 Ziffern gegebene Regel von jeder beliebigen Anzahl gilt, und daß man für jede weitere Ziffer in der Wurzel das doppelte Produkt des Betrags aller gefundenen Ziffern in die neue, und sodann das Quadrat der neuen Ziffer abzuziehen hat; wie viel Ziffern auch vorhergegangen seyn mögen. Nur ist zu merken, daß bei der Division mit dem doppelten Produkt der Quotient immer nur so groß angenommen werden darf, daß der Betrag des Rests mit der nächsten Ziffer rechts zusammen gelesen gleich oder größer ist, als das Quadrat der neuen Ziffer.

Beispiele:

9,96,72,80,41	31571
9	6
9	62
6	630
36	6314
1	
357	
310	
472	
25	
4478	
4410	
680	
49	
6314	
6314	
1	
1	
0	
1,07,94,00,54,27	103894
1	2
79	20
60	206
194	2076
9	20778
1850	
1648	
2020	
64	
19365	
18684	
8814	
81	
87332	
83112	
42207	
16	
42191	

25,09,00,81	5009
25	10
0	100
0	1000
9	
0	
90	
0	
900	
0	
9008	
9000	
81	
81	
0	

oder kürzer:

25090081	5009
25	10
9008	100
9000	1000
81	
81	
0	

Hier ist also $10794005427 = 103894^2 + 42191$, d. h. die gegebene Zahl ist gar keine Quadratzahl und die nächst größte Quadratzahl ist 10793963236.

220) Nimmt man wieder a, b, c, d ... in der beschränkten Bedeutung (217), so ist nach (212, b).

$(abc)^3 =$	$(a00+b0+c)^3$	oder $(327)^3$	$= 34965783$
$(a00)^3 =$	$a^3000000$	$(300)^3$	$= 27000000$
$+3(a00)^2 . b0 =$	$3.(a^2.b)00000$	$3(300)^2(20) =$	5400000
$+3(a00)(b0)^2 =$	$3(a.b_2)0000$	$3(300)(20)^2 =$	360000
$+(b0)^3 =$	b^3000	$(20)^3 =$	8000
$+3(ab0)^2.c =$	$3(ab)^2.c00$	$3.(320)^2.7 =$	2150400
$+3(ab0)c^2 =$	$3(ab)c^2 0$	$3.320.7^2 =$	47040
$+c^3 =$	c^3	$7^3 =$	343

Hieraus erhellet, daß, wenn man die Cubikzahl einer mehrzifferigen Zahl durch Multiplication der einzelnen Ziffern (wie in 212, b) erzeugt, jedes folgende Theilprodukt rechts eine Null weniger hat, daß also z. B. der Cubus der höchsten Stelle in 327 oder $(300)^3$ sich nur auf 34 in der Potenz erstreckt, ohne sich auf die letzten Stellen zu beziehen; das dreifache Produkt aus dem Quadrat der Hunderte in die Zehner bezieht sich, da es 5 Nullen hat, nicht auf die 5 letzten Stellen im Cubus, also nur auf eine Stelle im Cubus weiter rechts, als der Cubus der Hunderte und so fort, bis endlich der Cubus der Einer auch in der Quadratzahl Einer gibt.

221) Hat man also aus einer Zahl die Cubikwurzel zu ziehen, so verfahre man nach folgender Regel:

1) theile die Zahl in Klassen von drei Ziffern von rechts nach links, so gibt die Klassenzahl die Anzahl der Ziffern der Wurzel an (216, b).

2) Suche nach (212, b) die Formel für eine so vieltheilige Wurzel, so gibt diese an, welche Produkte in der gegebenen Cubikzahl enthalten sind, welche dann auf folgende Weise von ihr abgezogen werden.

a) die höchste Klasse enthält den Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel. Diese sucht man annähernd aus der Tafel (215) und schreibt sie rechts an, wie bei der Division die Ziffern des Quotienten. Zieht man den Cubus dieser Zahl ab, und nimmt man den allenfallsigen

Rest zur folgenden Stelle, so muß die entstandene Zahl das dreifache Produkt aus dem Quadrat der ersten Zahl in die zweite enthalten;

b) dividirt man also mit dem doppelten Quadrat der ersten Ziffer diese Zahl, so ist der Quotient die zweite Ziffer der Wurzel. Zieht man das dreifache Produkt des Quadrats der ersten und der zweiten Zahl ab, und nimmt man den Rest zur folgenden Ziffer, so ist in der so entstandenen Zahl das dreifache Produkt der ersten Zahl in das Quadrat der zweiten enthalten;

c) dieses zieht man ab und nimmt den Rest zur folgenden Ziffer, so ist in der erzeugten Zahl der Cubus der zweiten Ziffer enthalten;

d) diesen zieht man ab, und nimmt den Rest zur folgenden Ziffer.

3) Erwägt man, was (212, b) von der Zusammensetzung der Cubikzahlen aus den Summanden der Wurzel gesagt ist, so sieht man, daß für jede neue Ziffer in der Wurzel abzuziehen ist:

1) das dreifache Produkt aus dem Quadrat des Betrags aller vorhergehenden Ziffern in die neue.

2) das dreifache Produkt aus dem Betrag aller vorhergehenden Ziffern in das Quadrat der neuen.

3) der Cubus der neuen Ziffer.

Beispiel: Aus 904231063 die 3te Wurzel auszuziehen.

$(abc)^3$	904,231,063	$900 + 90 + 7$
$a^3000000$ . . .	729000000	$3 . (900)^2 = 2430000$
	175231063	$2430000 . 60 = 145800000$
$3(a^2 . b)00000$.	145800000	$3 . 900 . (60)_2 = 9720000$
	29431063	$60^3 = 216000$
$3(a . b^2)0000$ . .	9720000	$3 . 960^2 = 2764800$
	19711063	$2764800 . 7 = 19353600$
b^3000 . .	216000	$3 . 960 . 7^2 = 141120$
	19495063	$7^3 = 343$
$3(ab)^2c00$ . . .	19353600	
	141463	
$3(ab)c^20$	141120	
	343	
b^3	343	
	0	

Es ist also $\sqrt[3]{904231063} = 967$

Kürzer könnte man die Rechnung so darstellen:

904,231,063	967
729	$3 \cdot 9^2 = 243$
1752	$243 \cdot 6 = 1458$
1458	$3 \cdot 9 \cdot 6^2 = 972$
2943	$3 \cdot 96^2 = 27648$
972	$7 \cdot 27648 = 193536$
19711	$3 \cdot 96 \cdot 7^2 = 141120$
216	
194950	
193536	
14146	
14112	
343	
343	

2) 79,831,543,084,271 | 43058

64	$3 \cdot 4^2 = 48$
158	$3 \cdot 48 = 144$
144	$3 \cdot 4 \cdot 3^2 = 108$
143	$3 \cdot 43_2 = 5547$
108	$3 \cdot 430^2 = 554700$
351	$3 \cdot 430_2 \cdot 5 = 2773500$
27	$3 \cdot 430 \cdot 5^2 = 32250$
3245430	$3 \cdot 4305_2 = 55599057$
2773500	$3 \cdot 4305^2 \cdot 8 = 444792600$
4719308	$3 \cdot 4305 \cdot 8^2 = 826560$
32250	
46870584	
125	
468704592	
444792600	
239119927	
826560	
238293367	
512	
2382933159	

Es ist also 79831543084271 gar keine Cubikzahl, sondern sie übersteigt die nächst größte Cubikzahl um den angegebenen

Rest. Uebrigens hat man sich auch hier zu hüten, daß man bei der Division mit dem dreifachen Quadrat den Quotienten nicht zu groß annimmt.

222) Die Beispiele, welche (212) am Ende über Quadrate und Cubi von Decimalbrüchen gegeben sind, lehren, daß sie in der Anzahl der Stellen vom Komma aus demselben Gesetz folgen, wie die Quadrate und Cubi ganzer Zahlen, daß nämlich jede Stelle in der Wurzel im Quadrat 2, im Cubus 3 Decimalstellen hinzufügt. Man kann daher aus Decimalbrüchen, wie aus ganzen Zahlen die Wurzel ausziehen, wenn man die Eintheilung in Klassen vom Komma aus nach rechts und (wenn Ganze dabei sind) nach links macht, und am Ende in der Wurzel so viel Decimalstellen abschneidet, als der Bruch in den Decimalstellen Klassen hatte. Hat der Bruch nicht genug Decimalstellen, so hängt man ihm Nullen rechts an, bis die Eintheilung möglich wird (158, a. Z. 2.).

Beispiele: a) Für die Quadratwurzel.

1)

```
0,75|89|89|44 ⌈8712
 64           ⌊16
-----
 118          174
 112          1742
-----
  69
  49
-----
  208
  174
-----
  3489
     1
-----
  34884
  34884
-----
      0
```

Da nun der Bruch 4 Paare Decimalstellen hat, so hat die Wurzel 4 Decimalstellen; sie ist also 0,8712.

2) 9,09|34|59 [3015
9 [60
---
93 602
60

334
1

3335
3010

3250
25

3225

3) 0,00|02|25 [15
1 [2

12
10

25
25

0

Es ist also die gesuchte Wurzel in 2) 3,015 und der Rest 0,003225. D. h. $3{,}015^2 = 9{,}090225$, dazu 0,003225 gibt den Bruch 9,09345. In 3) ist sie 0,015.

b) Für die Cubikwurzel.

1) 69,934|528 [412
64 [$3 . 4^2 = 48$
---
59 $3 . 4 . 1^2 = 12$
48 $3 . 41^2 = 5043$
---
113 $3 . 41 . 2^2 = 492$
12

1014

1

10135
10086

492
492

8
8

0

Da nun der Bruch 2 Klassen von Decimalstellen hatte, so erhält die Wurzel 2 Decimalstellen, sie ist also 4, 12.

2) 0,543|128|700 [815
512 $3 . 8^2 = 192$

311 $3 . 8 . 1^2 = 24$
192 $3 . 81^2 = 19683$

1192 $3 . 81 . 5^2 = 6075$
24

11688
1

116877
98415

184620
6075

1785450
125

1785325

Es ist also die Wurzel 0,815 und der Rest 0,001785325.

3) 0,000|014|783|100 [245
8 $3 . 2^2 = 12$

67 $3 . 2 . 4^2 = 96$
48 $3 . 24_2 = 1728$

198 $3 . 24 . 5^2 = 1800$
96

1023
64

9591
8640

9510
1800

77100
125

76975

Es ist also die Wurzel 0,0245 und der Rest 0,000000076975.

Zusatz. Man kann also auch aus jedem Bruch die Wurzel ausziehen, wenn man ihn in einen Decimalbruch verwandelt und aus diesem die Wurzel auszieht.

Z. B. $\sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{0{,}454545\ldots} = 0{,}67419\ldots$

223) Das Anhängen von Nullen an die Decimalbrüche (158, a. Z. 2.) gibt ein Mittel an die Hand, sich dem Werthe der Wurzel sowohl bei ganzen Zahlen, als bei Decimalbrü-

chen durch Fortsetzung des Versprechens so nah', als man immer will zu nähern.

Beispiele. a) Für die Quadratwurzel.

1) 0,01 | 20 | 25 | 1 [109659
1 20

20 2 218
18 0 2192

2 25 21930
81

1 441
1 308

1330
36

12940
10960

19800
25

197750
197370

3800
81

3719

Ohne Anhängung von Nullen wäre die Wurzel gewesen 0,109 und der Rest 0,000144. Durch die angefügten Nullen wurde der Bruch 0,012025100000, die Wurzel also 0,109659 und der Rest 0,000000003719 und man sieht, daß man durch Fortsetzung dieses Verfahrens sich dem wahren Werthe der Wurzel immer mehr nähert, obschon man ihn nie erreicht.

2) Die Quadrat-Wurzel aus 5 zu ziehen.

5, [223606 Also ist $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$
4 4

10 44
8 446

20 44720
4

160
132

280
9

2710
2676

340
36

304000
268320

356800
36

356764

b) Für Cubikwurzeln.

1) 37,5 [3347
27 [$3.3^2 = 27$

105 $3.3.3^2 = 81$
81 $3.33^2 = 1584$

240 $3.33.4^2 = 1584$
81 $3.334^2 = 334668$

1590 $3.334.7^2 = 49098$
27

15630
13068

25620
1584

240360
64

2402960
2342676

602840
49098

5537420
343

5537077

Ohne Anhängung von Nullen wäre die Wurzel 3, 3 und der Rest 1,563. Durch Fortsetzung des Verfahrens aber ist die Wurzel 3,347 und der Rest nur 0,005537077

2) die Cubikwurzel aus 2 zu ziehen:

$\sqrt[3]{2}$

2	12599	Also $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$
1	$3.1^2 = 3$	
10	$3.1.2^2 = 12$	
6	$3.12^2 = 432$	
40	$3.12.5^2 = 900$	
12	$3.125^2 = 46875$	
280	$3.125.9^2 = 30375$	
8	$3.1259^2 = 4755243$	
2720	$3.1259^2.9^2 = 305937$	
2160		
5600		
900		
47000		
125		
468750		
421875		
468750		
30375		
4383750		
729		
43830210		
42797187		
10330230		
305937		
100242930		
729		
100242201		

Zwölfter Abschnitt.

Allgemeine Lehrsätze von Potenzen und Wurzeln.

224) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ $\quad \sqrt[n]{a^n} = a$

d. h. wenn man eine Zahl zur nten Potenz erhebt, und zieht daraus die nte Wurzel, so erhält man die Zahl selbst (213).

$\left(\sqrt[2]{4}\right)^2 = 4$ und eben so $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

d. h. wenn man aus einer Zahl eine Wurzel auszieht, und potenzirt diese darauf wieder mit dem Wurzelexponenten, so bleibt die Zahl selbst unverändert.

Anmerk. Man könnte dieß auch so ausdrücken: einen Potenzexponenten schafft man weg, indem man die Potenz mit ihm radizirt; einen Wurzelexponenten, indem man die Wurzel mit ihrem Exponenten potenzirt.

225) $\sqrt[2]{4.9} = \sqrt[2]{36} = 6$; aber auch $= \sqrt[2]{4} . \sqrt[2]{9} = 2.3 = 6$

$\sqrt[3]{27.8} = \sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{8} = 3.2 = 6 = \sqrt[3]{216}$

$\sqrt[4]{16.625} = \sqrt[4]{16} . \sqrt[4]{625} = 2.5 = 10 = \sqrt[4]{10000}$

also allgemein: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$

d. h. Soll man aus einem Produkt die Wurzel ausziehen, so kann man sie aus den einzelnen Factoren ausziehen.

Soll man eine Wurzel mit einer gleichnamigen multipliciren, so multiplicire man die Zahlen unter dem Wurzelzeichen (die Radicanden).

Beispiele, die sich hieraus und aus (224) erklären.

1) $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m} . \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$

2) $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3} . \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3 . 2} = \sqrt[3]{128}$

3) $\sqrt[n]{a^n bc^n} = ac\sqrt[n]{b}$

4) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 . 3} = 3\sqrt[3]{2}$

5) $\sqrt[2]{20} = 2\sqrt[2]{5}$,

6) $\sqrt[4]{80} = 2\sqrt[4]{5}$

7) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$,

8) $5\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{875}$

9) $(a+b)\sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{(a+b)^m} . \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{(a+b)^m . c}$

10) $\sqrt[m]{(a-b)^m . c} = (a-b)\sqrt[m]{c} = a\sqrt[m]{c-b}\sqrt[m]{c}$

11) $7\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$

12) $\sqrt[2]{5} + 3\sqrt[2]{5} + 4\sqrt[2]{5} = 8\sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{320}$

13) $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \sqrt[m]{\frac{a}{a}} = \sqrt[m]{1} = 1.$

226) $\sqrt[2]{\frac{4}{9}} = \sqrt[2]{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}$ (nach 210) $= \sqrt[2]{(\frac{2}{3})^2}$ (nach 204)

$= \frac{2}{3}$; $= \frac{\sqrt[2]{2^2}}{\sqrt[2]{3^2}}$ (nach 224) $= \frac{\sqrt[2]{4}}{\sqrt[2]{4}}$

Daher: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

d. h. Ist aus einem Quotienten die Wurzel auszuziehen, so kann man sie aus Zähler und Nenner ausziehen, und die erste durch die letztere dividiren. Soll man eine Wurzel durch eine gleichnamige dividiren, so dividire man die Zahlen unter dem Wurzelzeichen.

Bemerkung. Aus jedem Bruch kann man immer die Wurzel wenigstens annähernd ausziehen, wenn man ihn in einen Dezimalbruch verwandelt (222. Z.). Die hier aufgestellte Regel ist aber dann besonders brauchbar, wenn die Wurzel des Zählers oder Nenners rational ist.

3. B. $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

$\sqrt{\frac{49}{144}} = \frac{7}{12}$, $\sqrt[3]{\frac{27}{216}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{15}$

$\sqrt{\frac{10}{11}} = \sqrt{\frac{100}{110}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{110}} = \frac{10}{\sqrt{110}}$

$\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$\sqrt[3]{\frac{5}{216}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{6}$, $\sqrt[3]{\frac{5}{36}} = \sqrt[3]{\frac{30}{216}} = \frac{\sqrt[3]{30}}{6}$

$$V_{\frac{1}{2}} = \frac{V\,1}{V\,2} = \frac{1}{V\,2} = V_{\frac{2}{4}} = \frac{V\,2}{2} = \tfrac{1}{2} V\,2$$

$$V_{\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}, V_{\frac{2}{25}} = \tfrac{1}{5}$$

$$\sqrt[3]{V_{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{V\,3} = \sqrt[3]{V_{\frac{2}{27}}} = \frac{V\,9}{3} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{V\,9}$$

227) $\sqrt[2]{V_{2^6}} = \sqrt[2]{V_{2^3 \cdot 2^3}}$ (nach 205) $= \sqrt[2]{V_{(2^3)^2}}$ (nach 204) $= 2^3$ (nach 224) $= 2^{\frac{6}{2}}$. Daher

$$\sqrt[n]{V\,a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Soll aus einer Potenz eine Wurzel ausgezogen werden, so dividire man mit dem Wurzelexponenten den Potenzexponenten, und erhebe die Grundzahl zur so vielsten Potenz, als der Quotient anzeigt. Hieraus sieht man zugleich, daß mit einem Quotienten potenziren nichts anderes heißt, als mit dem Dividenden potenziren, und dann die sovielste Wurzel ausziehen, als der Divisor angibt. Z. B.

1) $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{V_{4^3}} = \sqrt[2]{V_{2^3 \cdot 2^3}} = 2^3 = 8$

2) $4^{0,51} = 4^{\frac{51}{100}} = \sqrt[100]{V_{4^{51}}}$

3) $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{V\,16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{V\,2^{12}}} = \frac{1}{2^{\frac{12}{4}}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

4) $16^{1\frac{3}{4}} = 16^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{V\,16^7} = \sqrt[4]{V_{2^{28}}} = 2^{\frac{28}{4}} = 2^7 = 128$

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4^{\frac{5}{2}}}\right)} = 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{V\,4^5} =$

$$\sqrt[4]{V_{2^{10}}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

Zusatz. 1. Ist in $\sqrt[n]{V\,a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $m = 1$, so hat man

$$\sqrt[n]{V\,a^1} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{V\,a}$$

d. h. jede Wurzel kann auch als Potenz mit gebrochenem Exponenten bezeichnet werden, dessen Zähler 1, dessen Nenner der Wurzelexponent ist.

$$\text{z. B. } \sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 4^{0,5} = 2$$

$$\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}} = 10^{0,333\ldots}$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2, \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 2, \quad 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$125^{\frac{1}{3}} = 5, \quad 64^{\frac{1}{6}} = 64^{0,166\ldots} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Zusatz 2. Demnach lassen sich alle Sätze von den Wurzeln als Sätze von den Potenzen bezeichnen. Z. B.

1) $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ (nach 234)

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$ (nach 225)

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ (nach 226)

228) $\sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{4.4.4}$ (nach 204) $= \sqrt[2]{2.2.2.2.2.2}$

$= \sqrt[2]{2^6}$ (nach 204) $= \sqrt[2]{(2^3)^2} = 2^3$

Aber auch $\left(\sqrt[2]{4}\right)^3 = \left(\sqrt[2]{2.2}\right)^3 = 2^3$; also $\sqrt[2]{4^3} = \left(\sqrt[2]{4}\right)^3$

Daher auch $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

d. h. Es ist gleichviel, ob man zuerst eine Zahl mit einer Zahl m potenzirt und dann die nte Wurzel auszieht, oder ob man zuerst die nte Wurzel auszieht und dann mit m potenzirt. Oder auch: Aus einer Potenz zieht man die Wurzel, wenn man sie aus der Grundzahl zieht, und eine Wurzel potenzirt man, wenn man die Zahl unter dem Wurzelzeichen potenzirt.

Beispiele:

$$\sqrt[2]{a^m \cdot b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{m}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[2]{a}\right)^m \cdot \sqrt[4]{b}$$

$$\sqrt[3]{a^2 \cdot b^3} = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{3}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 \cdot b$$

$$a^{\frac{5}{4}} \cdot b^{-\frac{5}{6}} \cdot c^{-\frac{2}{3}} = \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^5}{b^{\frac{5}{6}} \cdot c^{\frac{2}{3}}} \qquad \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^5}{\left(\sqrt[6]{b}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[3]{c}\right)^2}$$

229. Eine Wurzel bleibt unverändert, wenn man den Wurzelexponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt, mit welcher man den Exponenten der Zahl unter dem Wurzelzeichen oder des Radicanden multiplicirt oder dividirt.

Es ist $\sqrt[2]{4^3} = \sqrt[4]{4^6}$, denn $\sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{4.4.4} = \sqrt[2]{64} = 8$

und $\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$

Beispiele:

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2}$, $\sqrt[12]{5^6} = \sqrt[2]{5}$

$\sqrt[8]{4^{12}} = \sqrt[2]{4^3} = 4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

Zus. 1. Darnach lassen sich Wurzeln auf beliebige, somit mehrere Wurzeln auf gleiche Exponenten bringen, und da sich solche Wurzeln bei der Multiplication unter ein Wurzelzeichen fassen lassen, multipliciren wie in (225).

1) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2}$, $\sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{5^3}$ also $\sqrt[3]{4} . \sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{4^2} . \sqrt[6]{5^3}$

$= \sqrt[6]{4^2 . 5^3}$

2) $\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n . b^m}$

3) $\sqrt[m]{a^3} . \sqrt[n]{b^5} . \sqrt[p]{c^2} = \sqrt[m.np]{a^{3np} . b^{5mp} . c^{2mn}}$

4) $5 . \sqrt[2]{3} . \sqrt[3]{6} = 5\sqrt[6]{3^3} . \sqrt[6]{6^2} = 5\sqrt[6]{3^3 . 6^2} = 5\sqrt[6]{972}$

5) $2\sqrt{3}\,(6 - \sqrt{7}) = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{21}$

6) $5\sqrt[3]{2}\,(1 + \sqrt[2]{2}) = 5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[6]{2^2 . 2^3} = \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{5^6 . 2^5}$

Man sieht, daß der bequemste gemeinschaftliche Exponent das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist von den Exponenten der gegebenen Wurzeln.

Zusatz 2. Diese Gleichbenennung der Wurzeln läßt sich auch so darstellen:

$$\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{m}} . b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{mn}} . b^{\frac{m}{mn}} = a^{n . \frac{1}{mn}} . b^{m . \frac{1}{mn}}$$

$$= \left(a^n\right)^{\frac{1}{mn}} . \left(b^m\right)^{\frac{1}{mn}} = \left(a^n . b^m\right)^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n . b^m}$$

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[2]{3} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = (5^2)^{\frac{1}{6}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{6}} = (5^2 \cdot 3^3)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3}$$

230) Soll aus einer Wurzel eine Wurzel ausgezogen werden, so multiplicire man die Wurzelexponenten, und ziehe die so vielste Wurzel aus, als das Produkt angibt.

Es ist $\sqrt[2]{729} = 729^{\frac{1}{2}}$, also $\sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3]{729^{\frac{1}{2}}}$ (nach 227 Z.)

$$= \left(729^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 729^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \text{ (nach 210)} = 729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729} \text{ (nach}$$

$$227 \text{ Z.)} = \sqrt[3.2]{729}.$$

Es ist auch hier $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$

aber auch $\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Hieraus sieht man zugleich, daß wenn man die so vielste Wurzel ausziehen soll, als ein Produkt anzeigt, man die so vielsten Wurzeln nach einander ausziehen kann, als die Factoren desselben angeben.

Z. B. $\sqrt[8]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}}$

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$$

$$\sqrt[12]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}}$$

231) Aus diesen allgemeinen Sätzen lassen sich folgende Umformungen der Ausdrücke erklären:

1) $18\sqrt[3]{5} - 17\sqrt[3]{18} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt[3]{18} = 14\sqrt{5} - 8\sqrt[3]{18}$

2) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

3) $2\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} = \frac{2}{5}\sqrt{15} + 2\sqrt{15} - \sqrt{15} = \frac{7}{5}\sqrt{15}$

4) $\sqrt{a_2c - a^2d} = \sqrt{a^2(c-d)} = a\sqrt{c-d}$

5) $\sqrt{\frac{a^3b}{c^4d} - \frac{a^3}{c^5b}} = \sqrt{\frac{a^3}{c^3}\left(\frac{b}{cd} - \frac{1}{c^2b}\right)} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{cd} - \frac{1}{c^2b}}$

6) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{20}} = \sqrt[6]{20}$

7) $\sqrt[3]{\frac{125a^3}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b^3c^3}{a}}=\sqrt[3]{\frac{125a^5\cdot b^2}{b^3}}+\sqrt[3]{\frac{b^5\cdot c^3\cdot a^2}{a^3}}=$

$\frac{5a}{b}\sqrt[3]{a^2b^2}+\frac{bc}{a}\sqrt[3]{a^2b^2}=\left(\frac{5a}{b}+\frac{bc}{a}\right)\sqrt[3]{a^2b^2}$

8) $\sqrt[7]{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[14]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[42]{6}=\sqrt{\frac{2}{2^7}}$

9) $\left(h^2+\frac{1}{h^4}+\sqrt[5]{h^7}\right)\sqrt[9]{h}=\left(h^{\frac{2}{9}}+h^{-\frac{4}{9}}+h^{\frac{7}{45}}\right)\sqrt[9]{h}=h^{\frac{11}{9}}+h^{\frac{5}{9}}+h^{\frac{52}{45}}$

10) $(3+\sqrt{5})\,(2-\sqrt{5})=6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5=1-5\sqrt{}$

11) $(13-\sqrt{5})\,(7+3\sqrt{5})=91+39\sqrt{5}-7\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$
$=91+32\sqrt{5}-3\cdot5=76+32\sqrt{5}$

12) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3=5+2\sqrt{6}$

13) $5\sqrt{2\cdot3\sqrt{4+6\sqrt{2}}}=15\sqrt{2(4+6\sqrt{2}}=15\sqrt{4\,(2+3\sqrt{2})}$
$=30\sqrt{2+3\sqrt{2}}$

14) $\frac{48\sqrt[45]{t^{98}}}{6\sqrt[5]{t^7}}=8\sqrt[45]{\frac{t^{98}}{t^{63}}}=8\sqrt[45]{t^{35}}=8\sqrt[9]{t^7}=8t^{\frac{7}{9}}$

15) $\frac{\sqrt{72}+\sqrt{32}-4}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{72}{8}}+\sqrt{\frac{32}{8}}-\sqrt{\frac{16}{8}}=3+2-\sqrt{2}$

16) $\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt[6]{18^2}}{\sqrt[6]{6^3}}=\sqrt[6]{\frac{18^2}{6^3}}=\sqrt[6]{3^2}=(1\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{6}}$

17) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\,(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}$
$=3-2\sqrt{2}$

18) $a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[2]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[6]{a^3b^2}}$

19) $\frac{a^{-2}}{b^{-\frac{1}{5}}\cdot c^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt[5]{b}}{a^2\sqrt[2]{c}}=\frac{1}{a^2}\sqrt[10]{\frac{b^2}{c^5}}$

20) $\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}}}=ba^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{3}{4}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}=$

$b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\cdot c^{\frac{13}{12}}=b^{\frac{6}{12}}\cdot a^{-\frac{2}{12}}\cdot c^{\frac{13}{12}}=\left(b^6\cdot a^{-2}\cdot c^{13}\right)^{\frac{1}{12}}$

$=\sqrt[12]{\frac{b^6\cdot c^{13}}{a^2}}=c\sqrt[12]{\frac{b^6c}{a^2}}$

21) $\frac{ca^{\frac{3}{4}}}{da^{\frac{5}{6}}} = \frac{c}{da^{\frac{1}{12}}} = \frac{c}{d\sqrt[12]{a}}$

22) $\frac{a^m \cdot b^{-\frac{1}{4}}}{a^5 \cdot b^{-\frac{5}{6}}} = a^{m-5} \; b^{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}} = a^{m-5} \cdot b^{\frac{7}{12}}$

23) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

24) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a^3 \cdot b^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[2]{a \cdot b^3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[10]{\frac{a^6 \cdot b}{a^5 \cdot b^{15}}}} = \sqrt[30]{\frac{a}{b^{14}}}$

25) $\sqrt{(6\frac{1}{4} \cdot a^2b^2 - \frac{5}{3}abc^2 + \frac{1}{9}c^4)} = \frac{5}{2}ab - \frac{1}{3}c^2$

26) $\sqrt{(a^{2m}+2a^m \cdot b^m+b^{2m})} = a^m+b^m$

27) $\sqrt{(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2)} = a+b+c$

28) $\sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{x^2 + 2x + 1}} = \frac{a+b}{x+1}$

29) $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3)} = a+b$

30) $\sqrt[3]{(x^3\ 3x^2 + 3x - 1)} = x - 1$

31) $\sqrt[3]{(8x^3 - 84x^2 + 294x - 343)} = 2x - 7$

232) Anmerk. Die Formeln 25 bis 31 sind aus (212) verständlich. Ist aber der mehrtheilige Ausdruck, aus welchem die Wurzel zu ziehen ist, keine vollständige Potenz einer gegebenen Wurzel, so kann man durch ein Verfahren, ähnlich dem in (223), wenigstens annähernd einen Ausdruck finden, welcher die Wurzel desto genauer angibt, je weiter man darin fortgeht. (Vergl. 156).

Man suche z. B. $\sqrt{(a^2 + x^2)}$, so muß sie (212) nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots$. die Potenz $a^2 + x^2$ erzeugen. Zieht man also diese einzelnen Theile der Potenz von dieser nach einander ab, so ergeben sich immer mehr Glieder der Wurzel.

$$a^2 = \frac{a^2+x^2}{a^2} \Big| a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\cdots$$
$$\underline{x^2}$$

$$2ab = 2a\cdot\frac{x2}{2a} = \frac{x^2}{}$$
$$\underline{\quad}$$
$$b^2 = -\frac{x^4}{4a^2}$$

$$2(a+b)c = 2\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)\left(-\frac{x^4}{8a^3}\right) = -\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}$$
$$\underline{\quad}$$
$$+\frac{x^6}{8a^4}$$

$$c^2 = \left(-\frac{x^4}{8a^3}\right)^2 = +\frac{x^8}{64a^6}$$
$$\underline{\quad}$$
$$\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$$

$$2(a+b+c)d = 2\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}\right)\cdot\frac{x^6}{16a^5} = \frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}$$
$$\underline{\quad}$$
$$-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}$$

$$d^2 = \left(\frac{x^6}{16a^5}\right)^2 = \frac{x^{12}}{256a^{10}}$$
$$\underline{\quad}$$
$$-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

$$2(a+b+c+d)e = 2\left(a+\frac{x^3}{2a}-\frac{x^4}{8a^5}+\frac{x^6}{16a^5}\right)\left(-\frac{5x^8}{128a^7}\right) = -\frac{5x^8}{64a^6}-\text{ic.}$$

Auf ähnliche Weise verfährt man bei Ausziehung der Cubikwurzeln. Es ist also:

32) $\sqrt{(a^2+x^2)} = a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^5}+\cdots$

33) $\sqrt{(a^2-x^2)} = a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\cdots$

34) $\sqrt{(1+x)} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots$

35) $\sqrt{(1-x)} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{16}-\frac{5x^4}{128}-\cdots$

36) $\sqrt[3]{(a^3+x^3)} = a+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}+\frac{5x^9}{81a^8}-\frac{10x^{12}}{243a^{11}}+\cdots$

37) $\sqrt[3]{(a^3-x^3)} = a-\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}-\frac{5x^9}{81a^8}-\frac{10x^{12}}{243a^{11}}-\cdots$

38) $\sqrt[2]{(1+x)} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}\cdots$

Diese Formeln können auch zur Auffindung angenäherter Werthe irrationaler Quadrat- und Cubikwurzeln benützt werden.

233) Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multiplicirt, oder deren 2te Potenz eine negative Zahl gäbe. Denn sowohl $a \cdot a = a^2$, als auch $(-a)(-a) = +aa = a^2$

Man kann also, wenn man $\sqrt{4}$ hat oder 2, diese Wurzel eben sowohl mit dem Zeichen + als — mit sich selbst multiplicirt denken, d. h. das Zeichen $\sqrt{4}$ bezeichnet eben sowohl $+2$, als -2, weil $(+2)^2 = 4$ und $(-2)^2 = 4$ ist.

Man sagt deßhalb, das Zeichen $\sqrt{}$ sey zweideutig, d. h. es kann, je nachdem die Verbindung mit andern Zahlen, in welcher es vorkommt, verlangt, sowohl + als — vor sich haben.

Hieraus erhellet also, daß Ausdrücke, wie $\sqrt{-a}$, gar keine Bedeutung haben, die an sich denkbar wäre und in der Rechnung ausgeführt werden könnte. Solche Ausdrücke heißen daher auch imaginäre (eingebildete). Obwohl sie aber an sich unmöglich sind, so können sie doch, wenn sie durch richtige Verbindung richtiger Ausdrücke entstanden sind, auf richtige Weise mit andern Ausdrücken verbunden, denkbare Resultate liefern, und dienen dann gar oft zur Erleichterung und Vereinfachung der Rechnung. Doch kommen sie in Elementaraufgaben nur selten vor, weßhalb hier einige Beispiele ihre Umformung hinreichend erläutern.

1) $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$

2) $2\sqrt{-48} = 2\sqrt{(-1)48} = 8\sqrt{3}\sqrt{-1}$

3) $5\sqrt{-24} + 7\sqrt{-36} = 10\sqrt{6}\sqrt{-1} + 42\sqrt{-1} =$
$(10\sqrt{6} + 42)\sqrt{-1}$

4) $a\sqrt{-m} = a\sqrt{m}\sqrt{-1}$

5) $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{(-1)a}.\sqrt{(-1)b} = \sqrt{ab}\sqrt{(-1)(-1)}$
$\sqrt{ab}.(-1) = -\sqrt{ab}$; aber auch $(-1)(-1) = 1$. Daher
$\sqrt{ab}.\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{ab}\sqrt{1} = \sqrt{ab}$, woraus man ebenfalls die Zweideutigkeit der Quadratwurzel ersieht.

6) $(3-\sqrt{-2})(5-\sqrt{-2}) = 15 - 5\sqrt{2}\sqrt{-1} - 3\sqrt{2}\sqrt{-1}$
$+(-1)2 = 13 - 8\sqrt{2}\sqrt{-1}$

7) $(a\sqrt{-1})^{4n} = a^{4n}$

8) $(a\sqrt{-1})^{4n+1} = a^{4n+1}\sqrt{-1}$

9) $(a\sqrt{-1})^{4n+2} = -a^{4n+2}$

10) $(a\sqrt{-1})^{4n+3} = -a^{4n+3}\sqrt{-1}$

Aus der Lehre von den Potenzen und Wurzeln ergeben sich für die Verhältnisse und Proportionen noch folgende Sätze.

234) Wenn in einer geometrischen Proportion die Mittelglieder gleich sind, so heißt sie eine stetige, z. B. $2 : 4 = 4 : 8$ oder $a : b = b : c$.

Auch mehrere Verhältnisse können einander gleich und stetig sein. Z. B.

$a : b = b : c = c : d \ldots$ oder $1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 \ldots$

In der stetigen geometrischen Proportion ist das Quadrat des Mittelgliedes dem Product der Aussenglieder gleich (200).

Ist $a : b = b : c$, so ist $b^2 = ac$

Da also ac der Werth von b^2 ist, so findet man b, wenn man aus ac die Quadratwurzel zieht, d. h. $b = \sqrt{ac}$.

b heißt man auch die mittle geometrische Proportionalgröße zwischen a und c, oder das geometrische Mittel (s. 191).

Ist z. B. $5 : x = x : 20$, so ist $x^2 = 100$

also $x = \sqrt{100} = 10$, und es ist auch $5 : 10 = 10 : 20$

235) Ist $a : b = b : c$ und verbindet man damit $a : b = a : b$, so erhält man (201)

$a^2 : b^2 = a : c$, d. h. in einer stetigen Proportion verhält sich das erste Glied zum letzten wie die Quadrate der beiden ersten Glieder.

Z. B. ist $4 : 8 = 8 : 16$

so ist $4^2 : 8^2 = 4 : 16$

Ist $a : b = b : c$, $b : c = c : d$, so ist auch $a : b = c : d$. Verbindet man diese nach (201) so:

$a : b = a : b$

$a : b = b : c$

$a : b = c : d$ so kommt

$a^3 : b^3 = a : d$

D. h. in drei stetig gleichen Verhältnissen verhält sich das erste Glied zum letzten wie die Cubi der beiden ersten Glieder.

Z. B. ist $1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8$, so ist

$$1^3 : 2^3 = 1 : 8$$

Anmerk. Das Verhältniß der Quadrate gegebener Zahlen nannte man ehedem auch das zweifache, das Verhältniß der Cubi das dreifache Verhältniß u. s. f. Das Verhältniß der nten Potenzen das nfache Verhältniß; der Exponent zählt hier die verbundenen Verhältnisse.

236) Verbindet man mit:

$$a : b = c : d$$
$$a : b = c : d$$

so ist $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, verbindet man damit

$$a : b = c : d$$

so ist $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$

und so erhält man allgemein:

$$a^n : b^n = c^n : d^n$$

d. h., wenn 4 Zahlen proportionirt sind, so sind auch ihre gleichhohen Potenzen proportionirt.

Z. B. ist: $2 : 5 = 4 : 10$

so ist $4 : 25 = 16 : 100$

237) Ist $a : b = c : d$, so ist auch

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{a}$$

Denn ist dieß wahr, so muß sein nach (200)

$$\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{d}$$

$$\text{oder } \sqrt[n]{bc} = \sqrt[n]{ad}$$

$$\text{und } bc = ad$$

dieß ist aber in der Bedingung gegeben, somit auch die Annahme richtig.

Sind also 4 Zahlen proportionirt, so stehen auch ihre gleichvielsten Wurzeln in Proportion.

Beispiele: Ist $25 : 100 = 4 : 16$

so ist $5 : 10 = 2 : 4$

Ist $8 : 125 = 27 : 33\frac{7}{8}$

so ist $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{33\frac{7}{8}}$

oder $2 : 5 = 3 : 7\frac{1}{2}$

Dreizehnter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

238) Die Zahl, welche angibt, wie oft eine andere als Factor gesetzt, eine dritte erzeugt, nennt man auch den Logarithmus der dritten für die zweite als Grundzahl.

Beispiele. Ist $2^3 = 8$, so heißt 3 der Logarithmus von 8 für die Grundzahl 2. So ist, weil $4^2 = 16$, 2 der Logarithmus von 16 für die Grundzahl 4. Eben so ist, wenn $a^m = b$, m der Logarithmus von b für die Grundzahl a.

Man bezeichnet dieß so: $m = \overset{a}{\log} b$.

Es heißt also $5 = \overset{2}{\log} 32$: 5 ist der Logarithmus von 32 für die Grundzahl 2; denn $2^5 = 32$.

Ueberhaupt sieht man, daß immer

$$\overset{a}{\log} (a^m) = m \text{ ist.}$$

Zusatz. Gleiche Zahlen haben für dieselbe Basis gleiche Logarithmen.

Anmerk. Man sieht, daß der Logarithmus nichts anderes ist, als die Zahl, welche bisher Exponent genannt worden, nur mit dem Unterschied, daß während sie bisher zur Erzeugung der Potenz oder Wurzel beiträgt, nun umgekehrt die Potenz und Grundzahl als die Glieder betrachtet werden, welche den Exponenten bestimmen. Der Exponent, bestimmt durch Potenz und Grundzahl, heißt also Logarithmus. (λογων ἀριθμος oder Zahl der Verhältnisse, welche verbunden das Verhältniß der 1 zur Potenz angeben (235, A.).)

239) Ist die Grundzahl eine ganze Zahl, so hat eine größere Zahl einen größern Logarithmus. Z. B. $3 = \log_2 8$, $4 = \log_2 16$, weil $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ ist.

Der Logarithmus eines ächten Bruches ist dann eine negative Zahl. Z. B.

$$\tfrac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}, \text{ also ist } \log_2 \tfrac{1}{4} = -2$$

$$\tfrac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}, \text{ also ist } \log_2 \tfrac{1}{64} = -6$$

240) Ist aber die Grundzahl ein ächter Bruch, so ist der Logarithmus einer Zahl desto größer, je kleiner die Zahl ist, und umgekehrt. Z. B.

$$(\tfrac{1}{2})^5 = \tfrac{1}{32} \text{ oder } 5 = \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{32}$$

$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ oder $3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ und zwar ist der Logarithmus eines ächten Bruches positiv.

Aber der Logarithmus einer ganzen Zahl, die größer ist als 1, ist negativ, wenn die Grundzahl ein ächter Bruch ist. Z. B.

Da $(\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{(\frac{1}{8})} = 8$, so ist

$$-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

Da $(\frac{1}{2})^{-5} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^5} = \frac{1}{(\frac{1}{32})} = 32$, so ist

$$-5 = \log_{\frac{1}{2}} 32$$

und zugleich sieht man, daß der Logarithmus der größern Zahl stets abnimmt: wenn man nämlich bedenkt, daß $-5 < -3$, wie (68) bemerkt worden.

241) Sowohl für ganze, als gebrochene Grundzahlen gelten die beiden Sätze:

1) der Logarithmus der Grundzahl ist 1, denn $a^1 = a$, also

$$1 = \log_a a$$

2) der Logarithmus von 1 ist für jede Grundzahl 0, denn

$a^0 = 1$.

242) Folgende Tafel wird das Gesagte noch deutlicher machen:

Zahlen	Logarithmen für die Grundzahl 2	16	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
...	...	...	...	...
$\frac{1}{16}$	— 4	— 1	2	1
$\frac{1}{8}$	— 3	— $\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$	— 2	— $\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	— 1	— $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	0	0	0	0
2	1	$\frac{1}{4}$	— $\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{4}$
4	2	$\frac{1}{2}$	— 1	— $\frac{1}{2}$
8	3	$\frac{3}{4}$	— $1\frac{1}{2}$	— $\frac{3}{4}$
16	4	1	— 2	— 1
32	5	$1\frac{1}{4}$	— $2\frac{1}{2}$	— $1\frac{1}{4}$
64	6	$1\frac{1}{2}$	— 3	— $1\frac{1}{2}$
128	7	$1\frac{3}{4}$	— $3\frac{1}{2}$	— $1\frac{3}{4}$
256	8	2	— 4	— 2
512	9	$2\frac{1}{4}$	— $4\frac{1}{2}$	— $2\frac{1}{4}$
1024	10	$2\frac{1}{2}$	— 5	— $2\frac{1}{2}$
2048	11	$2\frac{3}{4}$	— $5\frac{1}{2}$	— $2\frac{3}{4}$
4096	12	3	— 6	— 3
8192	13	$3\frac{1}{4}$	— $6\frac{1}{2}$	— $3\frac{1}{4}$
16384	14	$3\frac{1}{2}$	— 7	— $3\frac{1}{2}$
32768	15	$3\frac{3}{4}$	— $7\frac{1}{2}$	— $3\frac{3}{4}$
65536	16	4	— 8	— 4
131072	17	$4\frac{1}{4}$	— $8\frac{1}{2}$	— $4\frac{1}{4}$
262144	18	$4\frac{1}{2}$	— 9	— $4\frac{1}{2}$
524288	19	$4\frac{3}{4}$	— $9\frac{1}{2}$	— $4\frac{3}{4}$
1048576	20	5	—10	— 5
2097152	21	$5\frac{1}{4}$	—$10\frac{1}{2}$	— $5\frac{1}{4}$
4194304	22	$5\frac{1}{2}$	—11	— $5\frac{1}{2}$
8388608	23	$5\frac{3}{4}$	—$11\frac{1}{2}$	— $5\frac{3}{4}$
16777216	24	6	—12	— 6
...	...			

243) Eine Zusammenstellung der Logarithmen für eine gewisse Grundzahl heißt ein Logarithmensystem. So enthält, z. B. die vorstehende Tafel Logarithmen aus 4 Systemen, nämlich für die Grundzahl 2, 16, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{16}$.

244) Da die Logarithmen nichts anderes sind, als Exponenten einer gewissen Grundzahl für gegebene Potenzen, so gelten von den Logarithmen eines Systems alle die Sätze, welche oben von den Potenzen einer Grundzahl aufgestellt wurden.

245) Da, nach (205) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, so kann man in als den Logarithmus von a^n für die Grundzahl a, m als den Log. von a^m für die Grundzahl a und $n+m$ als den Log. von $(a^n \cdot a^m)$ oder von dem Product beider Potenzen für dieselbe Grundzahl a betrachten (238) und dafür schreiben:

$$\overset{a}{\log}\,(a^m \cdot a^n) = \overset{a}{\log}\,(a^m) + \overset{a}{\log}\,(a^n)$$

Sind also zwei Zahlen p, q, mte und nte Potenzen der Grundzahl a, so kann man sie für a^m oder a^n setzen, alsdann hat man:

$$\overset{a}{\log}\,(p+q) = \overset{a}{\log}\,p + \overset{a}{\log}\,q$$

Eben so $\overset{a}{\log}\,(p \cdot q \cdot r) = \overset{a}{\log}\,p + \overset{a}{\log}\,q + \overset{a}{\log}\,r$

oder auch (242): $\overset{2}{\log}\,(64 \cdot 32) = \overset{2}{\log}\,64 + \overset{2}{\log}\,32$

weil nämlich: $2^6 = 64$, $2^5 = 32$, so ist $2^6 \cdot 2^5 = 2^{6+5} = 2^{11}$

also $\overset{2}{\log}\,(2^6 \cdot 2^5) = \overset{2}{\log}\,(2^{11}) = \overset{2}{\log}\,(2^6) + \overset{2}{\log}\,(2^5)$

d. h. $11 = 6 + 5$ und man hat den Satz:

der Logarithmus eines Products ist in jedem System (d. h. für eine und dieselbe Grundzahl) gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren.

Dieser Satz läßt sich auch so ausdrücken:

Hat man ein Product mehrer Zahlen und betrachtet man jede derselben als Potenz einer und derselben Grundzahl, so ist das Product eine Potenz derselben Grundzahl, deren Exponent die Summe der Exponenten der einzelnen Factoren ist.

Anmerk. Gewöhnlich läßt man die Grundzahl weg, wenn von Log. desselben Systems die Rede ist und schreibt also:

$$\lg.\,(p \cdot q) = \lg\,p + \lg\,q$$

Dieser Satz läßt sich bei der Multiplication der Zahlen zur Abkürzung und Rechnung benützen.

Hat man nämlich eine Tafel, worin alle Zahlen als Potenzen einer und derselben Grundzahl berechnet sind (Logarithmentafel), so braucht man bloß die Exponenten der Zahlen (Logarithmen) zu addiren, um den Exponenten des Produkts (Logarithmus) zu finden, wenn auch dieses als Potenz derselben Grundzahl betrachtet wird. Sucht man diesen in der Tafel auf, so ist die dazu gehörige Zahl das verlangte Produkt.

Beispiele:

1) Es sey zu finden: $256 . 16384$, so ist (242): $256 = 2^8$,

oder $\overset{2}{\log} 256 = 8$

$16384 = 2^{14}$ oder $\overset{2}{\log} 16384 = 14$

Da also $\overset{2}{\log} (256 . 16384) = \overset{2}{\log} 256 + \overset{2}{\log} 16384$,

so ist $\overset{2}{\log} (256 . 16384) = 8 + 14 = 22$

Da also 22 der Exponent ist, wenn $256 . 16384$ als Potenz von 2 betrachtet wird, in unserer Tafel (242) aber bei dem Exponenten oder Logarithmus 22 die Zahl 4194304 als 22ste Potenz von 2 steht, so ist $256 . 16384 = 4194304$.

Dasselbe hätte man übrigens nach jedem andern System erhalten. Z. B.

$\overset{16}{\log} 256 = 2$, $\overset{16}{\log} 16384 = 3\frac{1}{2}$

also $\overset{16}{\log} (256 . 16384) = 2 + 3\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$

Da aber nach der Tafel $5\frac{1}{2} = \overset{16}{\log} 4194304$, so ist $256 . 16384 = 4194304$.

2) Es sey zu finden: $128 . 2048 . 64$; so ist

$\overset{2}{\log} 128 = 7$

$\overset{2}{\log} 2048 = 11$

$\overset{2}{\log} 64 = 6$; also

$\overset{2}{\log} (128 . 2048 . 64) = \overset{2}{\log} 128 + \overset{2}{\log} 2048 + \overset{2}{\log} 64 =$

$7 + 11 + 6 = 24$

Da aber $24 = \log_2 16777216$, so ist $128 . 2048 . 64 = 16777216$.

Zusatz. Mittels der Logarithmen wird also die Multiplikation durch eine Addition ausgeführt.

246) Da nach (206) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, so kann man m als den Log. von a^m für die Grundzahl a, n als den Log. von a^n für dieselbe Grundzahl a und m—n als den Logarithmus des Quotienten für eben dieselbe Grundzahl betrachten (238), und schreiben:

$$\log\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = \log(a^m) - \log(a^n)$$

Hat man nun zwei Zahlen p und q, welche Potenzen von a sind, z. B. $p = a^m$, $q = a^n$, so hat man

$$\log\left(\frac{p}{q}\right) = \log p - \log q$$

z. B. $\log_2\left(\frac{64}{16}\right) = \log_2 64 - \log_2 16$

denn $\log_2 \frac{64}{16} = \log_2 4 = 2$ nach (242),

aber $\log_2 64 = 6$, $\log_2 16 = 4$, $6-4 = 2$

und dieß drückt man so aus:

Der Logarithmus eines Quotienten ist in jedem System gleich dem Log. des Dividenden weniger dem Log. des Divisors.

Dafür könnte man auch sagen:

Betrachtet man in einem Quotienten Dividend und Divisor als Potenzen einer Grundzahl, so ist der Quotient selbst eine Potenz dieser Grundzahl, deren Exponent der Unterschied des Dividenden und Divisors ist.

Dieser Satz läßt sich nun bei der Division der Zahlen zur Abkürzung der Rechnung benützen.

Hat man nämlich eine Tafel, worin alle Zahlen als Potenzen einer und derselben Grundzahl berechnet sind, so suche man in ihr den Logarithmus des Dividenden und den des Divisors (d. h. die Exponenten derselben für die in der Tafel angenommene Grundzahl), ziehe den letztern vom erstern ab,

so ist der Unterschied der Logarithmus des Quotienten, wenn auch dieser als Potenz der in der Tafel angenommenen Grundzahl betrachtet wird; dieser in der Tafel aufgesucht, gibt die beigeschriebene Zahl als gesuchten Quotienten.

Beispiele.

1) Es sey zu finden: $\frac{2097152}{8192}$,

so ist $\log\left(\frac{2097152}{8192}\right) = \log 2097152 - \log 8192$

Nun ist nach (242), wenn man etwa $\frac{1}{4}$ als Grundzahl annimmt, $\overset{\frac{1}{4}}{\log} 2097152 = -10\frac{1}{2}$

$$\overset{\frac{1}{4}}{\log} 8192 = -6\tfrac{1}{2}$$

$$\text{also } \overset{\frac{1}{4}}{\log} 2097152 - \overset{\frac{1}{4}}{\log} 8192 = (-10\tfrac{1}{2}) - (-6\tfrac{1}{2})$$
$$= -10\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{1}{2} = -4$$

Da aber $-4 = \log 256$, so ist $\frac{2097152}{8192} = 256$

Dasselbe erhält man nach jedem andern System. Z. B. nach 2.

$$\overset{2}{\log} 2097152 = 21, \overset{2}{\log} 8192 = 13;$$

$$21 - 13 = 8 = \overset{2}{\log} 256.$$

Zusatz. Mittels der Logarithmen wird also die Division durch eine Subtraction ausgeführt.

247) Da nach (210) $(a^m)^n = a^{m.n}$, so kann man m als den Logarithmus von a^m für die Grundzahl a betrachten, dann ist m.n der Logarithmus von a^{mn} für dieselbe Grundzahl a oder von $(a^m)^n$ nach (238). Dann läßt sich also schreiben:

$$\overset{a}{\log}(a^m)^n = n \,.\, \overset{a}{\log}(a^m)$$

Hat man daher eine Zahl p, welche eine Potenz von a ist, z. B. die mte, so daß $p = a^m$, und soll diese mit n potenzirt werden, so wird:

$$\log(p^n) = n \,.\, \log p$$

Z. B. $\overset{2}{\log}(16^3) = 3 \,.\, \overset{2}{\log} 16;$

Denn $\overset{2}{\log}(16^3) = \overset{2}{\log}(2^4)^3 = \overset{2}{\log} 2^{12} = 12$ nach (238)

Aber auch $3 . \overset{2}{\log} 16 = 3 . \overset{2}{\log}(2^4) = 3 . 4 = 12$

Dieß kann man so ausdrücken:

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Grundzahl multiplicirt mit dem Potenzexponenten.

Oder auch so:

Betrachtet man in einer Potenz die Grundzahl selbst als Potenz einer andern Zahl, so ist diese Potenz zu potenziren; also (210) ihr Exponent oder Logarithmus mit dem Potenzexponenten zu multipliciren.

Obgleich das Potenziren einer Zahl hierdurch eigentlich in ein Potenziren einer Potenz, somit in ein zusammengesetzteres Verfahren verwandelt wird, so läßt sich doch dieser Satz zur Abkürzung des Verfahrens beim Potenziren benützen.

Hat man nämlich eine Tafel, worin alle Zahlen als Potenzen einer gewissen Grundzahl berechnet sind, so suche man in dieser den Logarithmus der Grundzahl der zu berechnenden Potenz, so ist diese Grundzahl dadurch eine Potenz der in der Tafel angenommenen Grundzahl; diesen Logarithmus multiplicire man mit dem Potenzexponenten, so ist das Product der Exponent der gesuchten Potenz, wenn auch diese als Potenz der in der Tafel angenommenen Grundzahl betrachtet wird. Die Zahl, welche in der Tafel bei diesem Exponenten oder Logarithmus steht, ist also die gesuchte Potenz.

Beispiele:

1) Es sey zu finden 256^3.

Hier ist $\log(256^3) = 3 \log 256$ für jedes System.

Für die Grundzahl 2 ist also nach unserer Tafel:

$\log 256 = 8$, also $3 \log 256 = 3 . 8 = 24$;

aber $24 = \log 16777216$: also ist $256^3 = 16777216$

2) Es sey zu finden: 16^5; so ist

$\overset{\frac{1}{16}}{\log} 16 = -1$ also $\overset{\frac{1}{16}}{\log}(16^5) = 5 . \overset{\frac{1}{16}}{\log} 16 =$

$5 . (-1) = -5$; aber $-5 = \overset{\frac{1}{16}}{\log} 1048576$:

also 16^5 1048576.

Zusatz. Mittels der Logarithmen wird also das Potenziren in ein Multipliciren verwandelt.

248) Da nach (227) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, so ist, wenn man m als Logarithmen von a^m für die Grundzahl a betrachtet, $\frac{m}{n}$ der Logarithmus von $a^{\frac{m}{n}}$ oder von $\sqrt[n]{a^m}$ für dieselbe Grundzahl. Man kann also schreiben

$$\log_a\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = \frac{\log_a(a^m)}{n} = \frac{1}{n}\log_a(a^m)$$

Hat man also eine Zahl p, welche eine Potenz von a ist, z. B. $= a^m$, so ist

$$\log_a \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \cdot \log_a p$$

z. B. $\log_2 \sqrt[7]{2097152} = \frac{1}{7} \cdot \log_2 2097152$

Denn $\log_2 \sqrt[7]{2097152} = \log_2 \sqrt[7]{2^{21}} = \log_2\left(2^{\frac{21}{7}}\right) =$

$\log_2(2^3) = 3$ (nach 238).

Aber auch $\log_2 2097152 = 21$ (nach 242) also $\frac{1}{7}\log_2 2097152 = 3$

Man hat also den Satz:

Der Logarithmus einer Wurzel ist in jedem System gleich dem Logarithmus der Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, dividirt durch den Wurzelexponenten.

Dieß läßt sich auch so geben:

Hat man eine Wurzel auszuziehen und betrachtet man die Zahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen ist, als Potenz einer gewissen Grundzahl, so darf man nur den Exponenten dieser Potenz durch den Wurzelexponenten dividiren, um den Exponenten der Wurzel zu erhalten, wenn auch diese als Potenz der angenommenen Grundzahl angesehen wird.

Dieser Satz läßt sich zur Abkürzung des Verfahrens beim Wurzelausziehen benützen.

Ist nämlich eine Tafel vorhanden, in welcher alle Zahlen als Potenzen einer und derselben Grundzahl berechnet sind, so suche man in dieser den Exponenten oder Logarithmus der

Zahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen ist, so wird diese dadurch eine Potenz der in der Tafel angenommenen Grundzahl. Der Logarithmus dividirt durch den Wurzelexponenten, gibt alsdann den Exponenten oder Log. der gesuchten Wurzel, wenn auch sie als Potenz der in der Tafel angenommenen Grundzahl betrachtet wird. Die Zahl, welche bei diesem Quotienten steht, ist also die gesuchte Wurzel.

Beispiele.

1) Es sei zu finden $\sqrt[5]{32768}$.

So ist $\log \sqrt[5]{32768} = \frac{1}{5} \log 32768 = \frac{1}{5} . 15 = 3$.

Da aber $3 = \log 8$ (nach (242), so ist $\sqrt[5]{32768} = 8$.

2) Es sei zu finden $\sqrt[4]{1048576}$.

So ist $\frac{1}{4} \log 1048576 = \frac{1}{4} . 20 = 5 = \log 32$ nach (242).

Also $\sqrt[4]{1048576} = 32$.

Zusatz. Mittels der Logarithmen wird also das Wurzelausziehen auf die Division zurückgeführt.

249) Nach diesen 4 Grundformeln lassen sich nun, wenn man eine weitgenug reichende Logarithmentafel hat, Ausdrücke, wie folgende, leicht berechnen, indem man nämlich zuerst ihre Logarithmen und dann für diese die Zahl aufsucht.

$$\log (4 . bcd) = \log 4 + \log b + \log c + \log d$$

$$\log (a^m . b^n) = m \log a + n \log b$$

$$\log \left(\sqrt[m]{a^n} \right) = \log 5 + \frac{n}{m} \log a$$

$$\log \left(\frac{a^m}{a^p} \right) = m \log a - p \log a = (m - p) \log a$$

$$\log \frac{a}{\sqrt[5]{b}} = \log a - \frac{1}{5} \log b$$

$$\log \left(\frac{a^3 m \sqrt{c}}{a^5 p \sqrt[3]{d}} \right) = \log m + \frac{1}{2} \log c - (2 \log a + \log p + \frac{1}{3} \log d)$$

$$\log\left(\frac{n a^{-\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\right) = \log\frac{n}{(ab)^{\frac{1}{n}}} = \log n - \frac{1}{n}(\log a + \log b)$$

250) Für den Gebrauch ist das Logarithmensystem, dessen Grundzahl 10 ist, das bequemste. Es heißt auch wohl das gemeine oder Briggische, von Heinrich Briggs, Professor in Oxfort (starb 1630), der zuerst Logarithmen für die Grundzahl 10 berechnete und heraus gab.

251) Nach (239) gehört im Briggischen System für jeden ächten Bruch ein negativer Logarithmus, für jede Zahl, welche > 1 ist, ein positiver. Eben so sieht man, daß hier, weil

$1 = 10^0$ oder $\log 1 = 0$
$10 = 10^1$ — $\log 10 = 1$
$100 = 10^2$ — $\log 100 = 2$
$1000 = 10^3$ — $\log 1000 = 3$

und allgemein $\log (10)^n = n$ ist, die meisten Zahlen keine ganzen Logarithmen haben können. Insbesondere fallen die Logarithmen der Zahlen

von	1	bis	10	zwischen	0	und 1
—	10	—	100	—	1	— 2
—	100	—	1000	—	2	— 3

und allgemein sieht man, daß der zu jeder n zifferigen Zahl gehörige Logarithmus auffer Bruchtheilen so viel Ganze haben muß, als die kleinste n zifferige Zahl Stellen hat weniger eine, d. h. $n - 1$, weil die kleinste n zifferige Zahl 1 mit $n - 1$ Nullen ist. Z. B. 3451 muß nach diesem System so viel Ganze im Log. haben, als 1000, also 3 und die übrigen Ziffern können nur Bruchtheile im Log. hervorbringen, da erst 10000 zum Log. 4 hat. Diese Ganzen, welche der Logarithmus hat, nennt man die Kennziffer oder Charakteristik, die Bruchtheile in Decimalstellen, die Mantissen.

Auf gleiche Weise sind bei den Decimalbrüchen aus der Anzahl der Stellen die Ganzen zu erkennen, welche der Logarithmus hat. Denn es ist:

$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10^{-1}$ oder $\log 0{,}1 = -1$
$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 10^{-2}$, $\log 0{,}01 = -2$

$\frac{1}{1000} = 0{,}001 = 10^{-3}$ oder $\log 0{,}001 = -3$

$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ $\log 10^{-n} = -n$

Hieraus sieht man, daß alle Brüche, die zwischen 0,01 und 0,001 fallen, zur Kennziffer -2; alle, die zwischen 0,001 und 0,0001 fallen, zur Kennziffer -3 haben werden. Z. B. 0,008325 ist kleiner als 0,01 und doch größer als 0,001; hat also zur Kennziffer -2. Dagegen, da $0{,}00045 > 0{,}0001$ und doch $< 0{,}001$, so hat es zur Kennziffer -3.

252) Umgekehrt läßt sich aus der Kennziffer die Anzahl der Stellen in der Zahl leicht ersehen. Denn ist sie n, so hat die Zahl n+1 Stellen, ist sie $-n$, so fangen die bedeutenden Ziffern erst in der (n+1)ten Stelle an, wenn die bedeutenden Ziffern mehr als 1 betragen; ist die bedeutende Ziffer blos 1, so stehen vor dieser n Nullen, die Ganzen eingezählt. Hat z. B. ein Logarithmus 4 Ganze auſſer Bruchtheilen, so gehört er zu einer Zahl, die zwischen 10000 und 100000 fällt, d. h. zu einer 5zifferigen; hat er -2 als Kennziffer, so gehört er zu einem Decimalbruch, der gleich oder kleiner als 0,01 aber größer als 0,001 also zu einem Decimalbruch, deſſen bedeutende Ziffern in der dritten Decimalstelle anfangen, wenn sie > 1, in der zweiten, wenn sie blos 1 betragen.

253) Da $\log (ab) = \log a + \log b$ und

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

so ist 1) $\log_{10} 456000 = \log_{10} 456 + \log_{10} 1000$

Nun ist (was hier aus einer Tafel der Briggischen Logarithmen genommen ist) $\log_{10} 456 = 2{,}6589648$, $\log_{10} 1000 = 3$

also $\log_{10} 456000 = 5{,}6589648$

2) $\log_{10} 4{,}56 = \log_{10} \frac{456}{100} = \log_{10} 456 - \log_{10} 100$

$\log 456 = 2{,}6589648$, $\log 100 = 2$

also $\log_{10} 4{,}56 = 2{,}6589648 - 2 = 0{,}6589648$

3) $\log_{10} 0{,}000456 = \log_{10} \frac{456}{1000000} = \log_{10} 456 - \log_{10} 1000000$;

$\overset{10}{\log} 1000000 = 6$, also $\overset{10}{\log} 0{,}000456 = 2{,}6589648 - 6 = 0{,}6589648 - 4$.

Zusatz 1. In (251 und 252) sah man, daß im Briggischen System jeder Decimalbruch einen negativen Logarithmen habe. Hier sieht man nun, daß jeder solche negative Logarithmus als Unterschied gedacht werden kann, wenn man ihn um die Anzahl seiner Ganzen mehr 1 vermehrt und darauf eben diese hinzugefügten Ganzen wieder abzieht. So ist z. B. $\overset{10}{\log} 0{,}000456 = -3{,}3410352$; aber auch, wenn man 4 addirt und darauf wieder abzieht $= (4 - 3{,}3410352) - 4 = 0{,}6589648 - 4$ und dieß ist die Art, wie man gegenwärtig die Logarithmen von Decimalbrüchen in Rechnung nimmt.

Man hat hier die Regel:

Der Logarithmus eines Decimalbruchs ist dem Logarithmus der bedeutenden Ziffern desselben gleich weniger so viel Ganzen, als vor den bedeutenden Decimalstellen Nullen stehen. So ist z. B. $\log 0{,}456 = \log \frac{456}{1000} = 2{,}6589648 - 3 = 0{,}6589648 - 1$. Umgekehrt sieht man, daß, wenn von einem Logarithmus mit 0 Ganzen eine Anzahl Ganze z. B. n abgezogen ist, die bedeutenden Ziffern erst in der $n + 1$ Stelle anfangen (die Ganzen eingezählt).

Zusatz 2. Hieraus folgt, daß im Briggischen System alle Zahlen, von welchen die eine aus der andern durch Multiplication oder Division mit einer Potenz von 10 erzeugt ist, dieselben Decimalstellen des Logarithmus haben und daß sich ihre Logarithmen nur durch die Kennziffer unterscheiden, die aus der Anzahl der Stellen in den Zahlen erkannt wird.

254) Ueber die Berechnung der gemeinen oder Briggischen Logarithmen.

a) Da nun für die Basis 10 nur diejenigen Zahlen rationale Logarithmen haben können, welche ganze Potenzen oder Wurzeln von 10 sind; aus 10 aber durchaus keine ganze Zahl eine Wurzel ist: so haben alle Zahlen von 1 — 9, 11 — 99 u. s. f. irrationale Logarithmen, d. h. wenn sie als Potenzen von 10 betrachtet werden, so können

die Exponenten nur annähernd bestimmt, nie in ganzen oder Bruchzahlen völlig genau angegeben werden.

b) Wenn man die Logarithmen der Primzahlen kennt, so sind dadurch die Logarithmen aller anderen Zahlen gegeben. Denn da sich die übrigen Zahlen in Factoren zerlegen lassen, welche Primzahlen sind (125), so ist der Logarithmus jeder zusammengesetzten Zahl gleich der Summe der Log. ihrer einfachen Factoren. Z. B.

$$\log 12 = \log (2^2 . 3) = 2 \log 2 + \log 3.$$

c) Für die Berechnung der Logarithmen der Primzahlen mag folgendes Beispiel zur Erläuterung dienen.

Aufgabe. Den Logarithmus der Zahl 3 zu finden.

Vorbereitung. Man suche zuerst $2^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{2}$, daraus $2^{\frac{1}{4}}$ oder $\sqrt{\sqrt{2}}$, daraus $2^{\frac{1}{8}}$ oder $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ ꝛc. (230) und stelle diese in eine Tafel zusammen, wie folgende, wo in der zweiten Spalte die Exponenten von 10 oder die Logarithmen für die in der ersten Spalte befindlichen Zahlen stehen, wo aber die Zahlen als Wurzeln von 10 nur annähernd angegeben sind.

	Quadratwurzeln	Logarithmen
1	3,162277660	0,50000000
2	1,778279410	0,25000000
3	1,333521432	0,12500000
4	1,154781984	0,06250000
5	1,074607828	0,03125000
6	1,036632928	0,01562500
7	1,018151721	0,00781250
8	1,009035044	0,00390625
9	1,004507364	0,00195312
10	1,002251148	0,00097656
11	1,001124941	0,00048828
12	1.000562312	0,00024414
13	1,000281116	0,00012207
14	1,000140548	0,00006103
15	1,000070271	0,00003051
16	1,000035135	0,00001525

Auflösung. Aus dieser Tafel ergibt sich nun:

$$\frac{10^{0,5}}{10^{0,015625}} = 10^{0,4843750} = \frac{3,162277\ldots}{1,036632\ldots} = 3,050528\ldots$$

$$\frac{10^{0,4843750}}{10^{0,0039062}} = 10^{0,4804687} = \frac{3,050528\ldots}{3,009035\ldots} = 3,023213\ldots$$

$$\frac{10^{0,4804687}}{10^{0,0019531}} = 10^{0,4785156} = \frac{3,023213\ldots}{3,004507\ldots} = 3,009647\ldots$$

$$\frac{10^{0,4785156}}{10^{0,0009766}} = 10^{0,4775390} = \frac{3,009647\ldots}{3,002251\ldots} = 3,002887\ldots$$

$$\frac{10^{0,4775390}}{10^{0,0002441}} = 10^{0,4772959} = \frac{3,002887\ldots}{3,000562\ldots} = 3,001206\ldots$$

$$\frac{10^{0,4772959}}{10^{0,0001221}} = 10^{0,4771738} = \frac{3,001206\ldots}{3,000281\ldots} = 3,000362\ldots$$

$$\frac{10^{0,4771738}}{10^{0,0000305}} = 10^{0,4771433} = \frac{3,000362\ldots}{3,000070\ldots} = 3,000140\ldots$$

$$\frac{10^{0,4771433}}{10^{0,0000153}} = 10^{0,4771280} = \frac{3,000140\ldots}{3,000035\ldots} = 3,00004\ldots\text{*)}$$

Es ist also $\log^{10} 3,00004\ldots = 0,4771280$, da aber 3,00004 nur um $\frac{4}{100000}$ größer als 3 ist, so ist der Log. von 3 selbst nahe 0,477128; wenigstens sieht man, daß die ersten 5 Decimalstellen des Logarithmus durch keine Division mit irgend einer höhern Potenz von 10 als $10^{0,0000153\ldots}$ weiter verändert werden, daß also da, wo in den Logarithmen eine Annäherung auf 5 Decimalstellen genügt, der Logarithmus von 3 für die Basis 10 gleich 0,47713 ist.

Hätte man auf mehr Stellen sich dem wahren Werthe des Log. 3 nähern wollen, so wäre die Rechnung mit mehr Decimalstellen zu führen gewesen.

Uebrigens sieht man leicht, daß es nicht immer blos die Division ist, durch die man aus den in der Tafel aufgestell-

*) Die Differenzen in den Endziffern der Decimalbrüche rühren daher, daß die Rechnung mit mehr Ziffern geführt worden ist.

ten Brüchen sich einer ganzen Zahl und ihrem Logarithmus nähert, sondern daß man auch Multiplication bei andern Zahlen anwenden kann.

Anmerk. Die ältesten Tafeln sind nach andern aber nicht weniger beschwerlichen Methoden berechnet worden. Später hat man Anweisungen zur leichteren Berechnung gegeben, die sich indeß hier noch nicht auseinandersetzen lassen.

Unter den neuern größern Tafeln sind die brauchbarsten von Vega herausgegeben worden unter folgenden Titeln:

Georg Freiherr von Vega Logarithmische trigonometrische und andere zur ausübenden Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien 1783 in 2 Theilen und

Dessen Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch in 1 Bd. Leipzig 1ste Ausgabe 1797; von welchem bereits die 5te Auflage erschienen ist; Es enthält die Logarithmen der Zahlen von 1—101000.

Da für die meisten practischen Zwecke Logarithmen mit 5 Decimalstellen hinreichen, so sind neuerdings mehrere solche kleinere Tafeln erschienen; unter ihnen sind die brauchbarsten von Prasse (neue Ausgabe von Mollweide) in Leipzig herausgegeben worden, unter dem Titel:

Logarithmische Tafeln für die Zahlen, Sinus und Tangenten neu geordnet von Moritz von Prasse, revidirt und vermehrt von Karl Brandan Mollweide. Leipzig 1821. Sie enthalten aber nur die Logarithmen der Zahlen von 1—10000.

Wie diese Tafeln zu gebrauchen sind, lernt man am leichtesten aus der einer jeden vorangeschickten Anweisung.

255) Bei Vergleichung der gemeinen Logarithmen von drei nacheinanderfolgenden Zahlen, die größer sind als 1000, findet man, daß ihre Unterschiede nur noch in der 7ten Decimalstelle wenig verschieden sind und daß schon bei den Zahlen nahe an 10000 die Verschiedenheit der Unterschiede in der 7ten Stelle verschwindet.

z. B.	log 1125 = 3,0511525	0,0003859
	log 1126 = 3,0515384	0,0003855
	log 1127 = 3,0519239	
	log 9960 = 3,9982593	0,0000436
	log 9961 = 3,9983029	0,0000436
	log 9962 = 3,9983465	

Hat man gar nur Logarithmen mit 5 Decimalstellen, so sind diese Unterschiede schon im ersten Falle ganz gleich.

Da nun auf jede Einheit des Unterschiedes der Zahlen sich der Unterschied der Logarithmen wiederholt, so kann man sagen (193), es verhalten sich die Unterschiede der Zahlen wie die Unterschiede der Logarithmen. Z. B.

9962 — 9960 : 9962 — 9961 = 2 : 1 = 0,0000872 : 0,0000436

256) Diese Bemerkung gibt nun ein Hülfsmittel, auch aus den Tafeln, welche nur die Logarithmen der Zahlen unter 10000 enthalten, bei 7 stelligen Logarithmen die Logarithmen 7 stelliger Zahlen und umgekehrt für gegebene Logarithmen die Zahlen auf 7 Stellen zu finden; bei 5 stelligen die zu 5 zifferigen Zahlen gehörigen Logarithmen und umgekehrt Zehentausende für die Logarithmen.

Beispiele und Erläuterung.

a) Die Logarithmen zu solchen Zahlen zu finden, die mehr Ziffern haben als die Zahlen der Tafel.

1) log 11250 = 4,0511525
log 11260 = 4,0515384

Der Unterschied der Zahlen ist hier 10, der Unterschied der Logarithmen 0,0003859. Es kommt also auf jede Einheit in 10 von dem Unterschied des Logarithmen $\frac{1}{10}$ oder es müssen die Logarithmen der Zahlen von 11250 bis 11260 um 0,0000386 zunehmen. Es wird also:

log 11250 = 4,0511525
log 11251 = 4,0511911
log 11252 = 4,0512297
log 11253 = 4,0512683
log 11254 = 4,0513069
log 11255 = 4,0513455
log 11256 = 4,0513841
log 11257 = 4,0514227
log 11258 = 4,0514613
log 11259 = 4,0514999
log 11260 = 4,0515385

Daß bei dieser Berechnung mittels der Differenz log 11260 um 0,0000001 größer herauskommt, als ihn die Tafel hat,

rührt daher, daß die Differenz, welche eigentlich 0,00003859 ist, nach der Regel (163) zu 0,0000386 angenommen wurde. Diese Abweichung macht aber im Gebrauch keinen Unterschied.

2) Hat man also in der Tafel zu suchen log 11257, so suche man: log 11250 = 4,0511525

log 11260 = 4,0515384

und spreche: der Unterschied der Zahlen verhält sich wie der Unterschied der Logarithmen, oder

11260 — 11250 : 11257 — 11250 = 0,0003859 : x

oder 10 : 7 = 0,0003859 : x

und hieraus ist, nach (203) = $\frac{7 \cdot 0{,}0003859}{10}$ = x

wo man erhält 0,00027013 = x

Man hat also log 11257 = 4,0511525 + 0,0002701 = 4,0514226 bis anf die letzte Ziffer rechts mit dem oben gefundenen Werthe und dem übereinstimmend, den eine größere Logarithmentafel zeigt.

Für 5 zifferige Logarithmen hätte man:

11260 — 11250 : 11257 — 11250 = 0,00039 : x

oder 10 : 7 = 0,00039 : x

also $\frac{7 \cdot 0{,}00039}{10}$ = x = 0,000273

also log 11257 = 4,05115 + 0,00027 = 4,05142

3) Wäre zu suchen: log 4832789, so ist dazu eine Tafel nöthig mit 7 stelligen Log.

Es ist also log 4832000 = 6,6841269

log 4833000 = 6,6842168

also ist 4833000 — 4832000 : 4832789 — 4832000 = 0,0000899 : x

oder 1000 : 789 = 0,0000899 : x

also (203) $\frac{789 \cdot 0{,}0000899}{1000}$ = x

= 0,0000709311 = 0,0000709 nach (163);

also log 4832789 = 6,6841269 + 0,0000709 = 6,6841978,

wie ihn eine größere Logarithmentafel enthält.

Für 5 stellige Logarithmen wäre gewesen:

1000 : 789 = 0,00009 : x

0,00007101 = x

also log 4832789 = 6,68413 + 0,00007 = 6,68420

Aber denselben Logarithmus hat auch die Zahl 4832700.
Denn 10 : 7 = 0,00009 : x oder 0,000063 = x
also log 4832700 = 6,68413 + 0,000063 = 6,684193
wo der Unterschied aus der im vorigen Fall zu groß angenommenen Zahl in der 5ten Stelle herrührt.

Hieraus sieht man also, daß sich mit 5stelligen Tafeln nur für 5stellige Zahlen, mit 7stelligen aber für 7stellige die Logarithmen finden lassen.

Bequemer als hier geschehen ist, verfährt man übrigens nach folgender Regel:

1) Suche den Log. für 4 Stellen.
2) Nimm den Unterschied dieses und des nächstgrößern Log. so oft als die 5te Ziffer angibt und addire ihn zum gefundenen Log., nachdem man seine Ziffer um eine Stelle nach rechts gerückt, untergeschrieben hat.
3) Denselben Unterschied multiplicire mit der 6ten Ziffer und schreibe das Product abermals um eine Stelle weiter nach rechts gerückt unten an.
4) Auf gleiche Weise verfahre mit der 7ten Ziffer und in einigen Fällen selbst mit der achten.

Z. B. log 4832789 zu finden.

log 4832	=	6841269,	Unterschied: 899
7	=	6293	= 899 . 7
8	=	7192	= 899 . 8
9	=	8091	= 899 . 9
log 4832789	=	6,6841978	wie oben.

Zusatz. In größern Tafeln, wie z. B. im Vegaischen Handbuch findet man diese Unterschiede schon mit 1 bis 9 multiplicirt in einer besondern Spalte P. P. (Proportionaltheile) überschrieben, wodurch man also der Mühe überhoben ist, die Multiplication vorzunehmen und blos, wie hier geschehen, unterzusetzen und zu addiren nöthig hat.

Für 5zifferige Logarithmen hätte man so gerechnet:

log 4832	=	68413	Unterschied: 9
7	=	63	
8	=	72	
9	=	81	
4832789		6,68420	wie oben,

woraus man noch deutlicher erkennt, daß schon die 6te Ziffer nur mehr auf die 6te Stelle des Log. Einfluß hat, also bei der Rechnung nicht mehr in Betracht genommen werden kann.

Anmerk. Es ist bereits (253) bemerkt worden, daß man blos die Decimalstellen eines Logarithmus zu wissen braucht, um den ganzen Logarithmus zu haben. Es enthalten daher die meisten Tafeln nur die Decimalstellen der Logarithmen.

b) Zu einem gegebenen Logarithmus, der in der Tafel nicht genau enthalten ist, die Zahl auf mehr Stellen, als die Tafel enthält, zu finden.

Es sei zu suchen, die Zahl für den Logarithmus 6,4583141 oder, wie man dieß auch bezeichnet: Num log 6,4583141.

Zum nächstkleinern und größern Log. findet man in der Tafel log 2872000 = 6,4581844
Dagegen log 2873000 = 6,4583356
also 2873000 — 2872000 : x = 6,4583356 — 6,4581844 : 6,4583141 — 6,4581844
oder 1000 : x = 0,0001512 : 0,0001297 = 1512 : 1297 nach (195)

$$\text{also } x = \frac{1000 \cdot 1297}{1512} = 857 \text{ nach (203);}$$

also ist 6,4583141 = log (2872000 + 857) = 2872857 nach (253).

Für 5zifferige Logarithmen ist:

log 2872000 = 6,45818
log 2873000 = 6,45834, also
1000 : x = 6,45834 — 6,45818 : 6,45831 — 6,45818 =
0,00016 : 0,00013 = 16 : 13

$$\text{also } x = \frac{1000 \cdot 13}{16} = 812$$

woraus man bei Vergleichung mit dem vorigen Resultat sieht, daß nur die 5te Stelle der gesuchten Zahl genau gefunden werden kann. Es ist also

log 2872812 = 6,45831

wobei aber die letzten beiden Stellen der Zahl ungenau angegeben sind.

Zusatz. In größern Tafeln nimmt man die unter den Proportionaltheilen für jeden Unterschied der Logarithmen berechneten Zahlen.

Z. B. zu 6,4583141

log 28728 = 4583054 abgezogen

87 Rest

5 76 nächste Prop. theile

110 Rest

7 106 Prop. th.

4

also log 2872857 = 6,4583141

Anmerk. Gewöhnlich schreibt man von dem aus der Tafel genommenen nächst größten Logarithmus nur die Ziffern unter den gegebenen, welche von diesem differiren. Z. B. hier:

6,4583141
3054
87

Zusatz. 2. Auch hier ist klar, daß man die Kennziffer des Logarithmus nicht zu beachten braucht, sondern erst am Ende nach ihr die Menge der ganzen Stellen der Zahl bestimmt. Wäre also z. B. hier statt 6 die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 5 gewesen, so wäre die Zahl 287285,7; bei 1 wäre sie 28,72857; bei 0 aber 2,872857; beim Logarithmus 0,4583141 — 1 hätte man aber 0,2872857; und für den Logarithmus 0,4583141 — 3, fände sich 0,002872857 als gesuchte Zahl. Alles nach (253).

257) Uebungsbeispiele über die ganze Lehre der Logarithmen.

a) Bestimmung der Logarithmen von Zahlenausdrücken.

1) $\log (3470 . 2197) = \log 3470 + \log 2197$

$\log 3470 = 3{,}5403295$ oder $3{,}54033$

$\log 2197 = 3{,}3418301$ $3{,}34183$

$\log (3470.2197) = 6{,}8821596$ oder $6{,}88216$

2) $\log \frac{13}{7} = \log 13 - \log 7$

$\log 13 = 1{,}1139434$ oder $1{,}11394$

$-\log 7 = 0{,}8450980$ $0{,}84510$

$0{,}2688454$ $0{,}26884$

3) $\log 5\frac{7}{9} = \log \frac{52}{9} = \log 52 - \log 9$

$\log 52 = 1{,}7160033$ oder $1{,}71600$

$\log 9 = 0{,}9542425$ $0{,}95424$

$0{,}7617608$ $0{,}76176$

4) log (3748 . 1752 . 4065) = 10,4263942

5) log $15\frac{3}{4}$ = 1,1972805

6) log $367\frac{5}{8}$ = 2,5654050

7) log $\frac{2}{7}$ = log 2 — log 7

log 2 = 0,3010300 oder 0,30103

— log 7 = 0,8450980 0,84510

Hier würde man eigentlich einen negativen Logarithmus bekommen. Statt dessen addire man zum Minuenden so viel Ganze, als erforderlich sind, um den Subtrahenden abziehen zu können und subtrahire diese Ganzen wieder vom Rest.

Es ist nämlich der gesuchte Log.

0,3010300 — 0,8450980 = 1,3010300 — 1,8450980 nach (61) und dieß ist nach (58) = (1,3010300 — 0,8450980) — 1 = 0,4559320 — 1 wie bereits aus (253. Z.) hervorgeht.

Was man kurz so schreibt:

log 2 = 0,3010300 + 1

log 7 = 0,8450980

0,4559320 — 1

8) log $\frac{1}{9}$ = log 1 — log 9

log 1 = 0,0000000 + 1

log 9 = 0,9542425

0,0457575 — 1

9) log $\frac{3}{4}$ = 0,8750613 — 1

10) log $\frac{6}{37}$ = 0,2099496 — 1

11) $\frac{18}{34\,37}$ = log 18 — log 3437

log 18 = 1,2552725 + 3

log 3437 = 3,5361795

0,7190930 — 3

12 log 3,15 = log $\frac{315}{100}$ = log 315 — log 100

log 315 = 2,4983106

— log 100 = 2

0,4983106

Die Kennziffer 0 hätte man auch nach der Regel erhalten (253. Z.), daß, wenn eine Zahl Decimalstellen hat, die Kennziffer des Log. sich blos nach der Anzahl der ganzen Stellen richtet. Da also die einzifferigen Zahlen 0 Ganze im Log. haben, so erhielt man hier sogleich 0,4983106.

13) $\log 387{,}4 = 2{,}5881596$

14) $\log 12{,}63 = 1{,}1014034$

15) $\log 1{,}345 = 0{,}1287223$

16) $\log 25\frac{1}{2} = \log 25{,}5 = 1{,}4065402$

17) $\log 34\frac{3}{4} = \log 34{,}75 = 1{,}5409548$

18) $\log 0{,}385 = \log \frac{385}{1000} = \log 385 - \log 1000$
$= 2{,}5854607 - 3 = 0{,}5854607 - 1$

19) $\log 0{,}0385 = \log \frac{385}{10000} = \log 385 - \log 10000$
$= 2{,}5854607 - 4 = 0{,}5854607 - 2$

20) $\log 0{,}00385 = \log \frac{385}{100000} = \log 385 - \log 100000$
$= 2{,}5854607 - 5 = 0{,}5854607 - 3$

Anmerk. Es bestätigt sich also hier auf eine andere Art die oben aufgestellte Regel, daß der Logarithmus eines Decimalbruches ohne Ganzen gleich dem Log. der werthvollen Ziffern sei weniger so viel Ganzen, als vor den bedeutenden Ziffern Nullen stehen.

21) $\log 0{,}00065 = 0{,}8129134 - 4$

22) $\log 0{,}00005637 = 0{,}7510480 - 5$

23) $\log 0{,}001263 = 0{,}1014034 - 3$

24) $\log \frac{3748 \cdot 1752 \cdot 4065}{2931 \cdot 1425} = \log 3748 + \log 1752 + \log 4065$
$- (\log 2931 + \log 1425)$

Berechnung:

$\log 3748 =$	3,5737996	oder 3,57380
$\log 1752 =$	3,2435341	3,24353
$\log 4065 =$	3,6090605	3,60906
	10,4263942	oder 10,42639
$\log 2931 =$	3,4670158	3,46702
$\log 1425 =$	3,1538149	3,15381
dieß abgezogen vom Obigen	6,6208307	6,62083
giebt den gesuchten Log. =	3,8055635	oder 3,80556

25) $\log \frac{319 \cdot 765}{138} = 3{,}2475730$

26) $\log \frac{21{,}3 \cdot 7{,}655}{3{,}145 \cdot 0{,}0718} = 2{,}8587598$ 2,8585798

Berechnung:

$\log 21{,}3 =$	1,3283796
$\log 7{,}655 =$	0,8839452
	2,2123248

3,145

log 3145 = 0,4976206
log 0,0718 = 0,8561244 — 2

1,3537450 — 2, wofür man nach (253. 3.) schreibt: 0,3537450 — 1, dieß von Obigem abgezogen, gibt: 2,8585798

Die — 1 im Subtrahenden wurde nach (63) zu den 2 Ganzen im Minuenden addirt.

27) $\log \frac{2,13 \,.\, 765,5}{3145 \,.\, 718} = 0,8585798 - 4$

Berechnung:

log 2,13 = 0,3283796
log 765,5 = 2,8839452

3,2123248 + 4

log 3145 = 3,4976206
log 718 = 2,8561244

6,3537450

0,8585798 — 4

Man hat nämlich zu 3 im Minuenden 4 Ganze addirt, um den Subtrahenden abziehen zu können und diese dann vom Rest wieder abgezogen (253. 3.)

28) $\log 3^{15} = 15 \log 3 = 15 \,.\, 0,4771213 = 7,1568195$

29) $\log (\frac{4}{3})^5 = 5 (\log 4 - \log 3) = 5 \,.\, 0,1249387 = 0,6246935$

30) $\log (\frac{7}{9})^8 = 8 (\log 7 - \log 9) = 8 (0,8908555 - 1) =$
$7,1268440 - 8 = 0,1268440 - 1$

31) $\log (\frac{357}{1432})^6 = 6 (\log 357 - \log 1432) = 6 (2,5526682$
$- 3,1559430) = 6 (0,3967252 - 1) = 2,3803512 - 6$
$= 0,3803512 - 4$

32) $\log (\frac{7}{3})^7 = 2,5758369$

33) $\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{0,6989700}{2} = 0,3494850$

34) $\log \sqrt[3]{12} = \frac{1}{3} \log 12 = 0,3597271$

35) $\log \sqrt[5]{345000} = 1,1075638$

36) $\log \sqrt[5]{\frac{7}{5}} = \frac{1}{5} (\log 7 - \log 5) = 0,0487093$

37 17) $\log \sqrt[5]{\frac{4}{9}} = \frac{1}{5} (\log 4 - \log 9) = \frac{0,6020600 - 0,9542425}{5} =$

$\frac{0,6478175 - 1}{5} = \frac{4,6478175 - 5}{5} = 0,9295635 - 1$

38) $\log \sqrt[11]{\frac{2}{5}} = \frac{1}{11}\log 0{,}4 = \frac{0{,}6020600-1}{11} = \frac{10{,}6020600-11}{11}$
$= 0{,}9638236 - 1.$

Anmerk. Aus Beisp. 37 und 38 ersieht man, daß wenn ein Log. mit negat. Kennziffer zu dividiren ist, man diese erst um so viel Einheiten erhöht, als nöthig sind, um sie zu einer durch den Divisor theilbaren Zahl zu machen, wobei man dann auch dem Minuenden eben so viel Einheiten zusetzt (61).

39) $\log \sqrt[2]{8^5} = \log 8^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}\log 8 = \frac{5 \cdot 0{,}9030900}{2} = 2{,}2577250$

40) $\log \sqrt[3]{(\frac{1}{2})^5} = \frac{5}{3}\log 0{,}5 = \frac{5(0{,}6989700-1)}{3} = \frac{3{,}4948500-5}{3}$
$= \frac{1{,}4948500-3}{3} = 0{,}4982833 - 1$

41) $\log \sqrt[12]{0{,}345767} = 0{,}7309519 - 1$

42) $\log \sqrt[9]{\frac{25 \cdot \sqrt[5]{2}}{156\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}} = \frac{\log 25 + \frac{1}{5}\log 2 - (\log 156 + \frac{1}{3}\log 0{,}25)}{9}$
$= 0{,}9406342 - 1$

Berechnung.

log 25	= 1,3979400
$\frac{1}{5}$ log 2	= 0,0602060
Summe I.	= 1,4581460
log 156	= 2,1931246
$\frac{1}{3}$ log 0,25	= 0,7993133 − 1
Summe	= 1,9924379
Dieß von S. I. abgezogen, gibt:	0,4657081 − 1
Im Minuend u. Subtr. um 8 vermehrt	8,4657081 − 9
durch 9 dividirt	0,9406342 − 1

b) Im Auffinden der Log. für solche Zahlen, die die Gränze der Tafel überschreiten, kann man sich nach folgenden Beispielen üben:

43) log 9852789 = 6,9935583

log 9852	=	9935244 Unterschied 441
7	=	3087
6	=	2646
9	=	3969
		9985583

oder kürzer:

log 9852 = 9935244
7 309
6 26
9 4
9935583

Für 5 zifferige Logarithmen:

log 9852 = 99352 Unterſch. 5.
7 35
log 9852700 = 6,99356

44) log 101,34761 = 2,0058135

Für 5 Ziffern iſt log 101,34 = 2,00578
nämlich: log 1013 = 00561 Unterſch. 43.
4 17

45) log 0,0003599547 = 0,5562478 — 4 oder log 0,00035995 = 0,55624 — 4

46) log $75907\frac{1}{8}$ = 4,8802825 oder log 75907 = 4,88028

47) log $522076\frac{2}{7}$ = 5,7177339 oder log 522070 = 5,71773

48) log 0,07095137 = 0,8509608 — 2

c) Beiſpiele über die Beſtimmung der Zahlen für Logarithmen, die ſich in der Tafel nicht genau finden.

49) Zahl des log 6,0742664 = 1186496, ...

Berechnung.

1) Nach einer Tafel mit Proportionaltheilen und Log. bis 100000:

0742664
2311 Zahl: 11864
353
nächſte Pp. theile 329 9
24
22 6
1186496

2) Nach einer Tafel mit Log. bis 10000, aber 7 zifferigen Logarithmen.

0742664
0847 1186

Diff. 366 | 18170 | 496 also im Ganzen 1186496
| 1464 |

3530
3294

2360
2196

3) 4) Nach einer Tafel mit 5 zifferigen Logarithmen.

07427
08 . . . 1186 also zusammen 11865

Diff. 37 | 190 | 5
| 185 |

oder num. log 6,0742664 = 1186500

Anmerk. Man sieht, daß der Fehler, den man hier mit der 5 zifferigen Tafel begeht, desto geringer ist, je kleiner die Einheiten der letzten Stellen rechts sind. Z. B.

n. log 0,0742664 = 1,1186496

oder bei 5 ziff. = 1,11865

50) num log 4,0005673 = 10013,07

51) num log 0,17854 — 4 = 0,0001508481

Berechnung.

1785400

4013 . . . 1508

2879 | 13870 | . . . 481
| 11516 |

23540
23032

5080

also num. log 0,1785400 — 4 = 0,0001508481

Oder für 5 zifferige:

17854

40 . . . 1508

29 | 140 | 48
| 116 |

240
232

52) Welche Zahl gehört zum Log. 0,7610153—2? A. 0,05767868

53) Welche Zahl gehört zum Log. 9,4986215? A. 3152255000

54) Welche Zahl gehört zum Log. 0,6581936—3? A. 0,0045519

55) 54) Welche Zahl gehört zum Log. — 2,3795462? A. 0,004173051

Berechnung. — 2,3795462 = (3 — 2,3795462) — 3 = 0,6204538—3. Da nun zum Log. 6204538 die Zahl 4173051 gehört, so gehört zu 0,6204538 — 3 die Zahl 0,004173051.

Soll man also die Zahl suchen, die zu einem negativen Log. gehört, so ziehe man ihn von der nächstgrößern Anzahl von Ganzen ab, und setze diese als negative Kennziffer an. Zu diesem Unterschied sucht man alsdann die Zahl, deren ganze Stellen die negative Kennziffer bestimmt.

56) Die Zahl des Log. — 0,8152605 = 0,1530170

57) Die Zahl des Log. 2,5892792—7 ist der Zahl des Log. 0,5892792 — 5 gleich, oder 0,00003884

58) Die Zahl des Log. 7,5832191 — 5 oder des Log. 2,5832191 ist 38,30179

d) Berechnung von Zahlausdrücken mit Hülfe der Logarithmen.

59) $\frac{0{,}765 \cdot 0{,}0018}{3{,}1457 \cdot 567\frac{5}{12}} = \frac{0{,}765 \cdot 0{,}0018 \cdot 12}{3{,}1457 \cdot 6809} = 0{,}00000077145$

log 0,765 = 0,88366 — 1

log 0,0018 = 0,25527 — 3

log 12 = 1,07918

0,21811 — 2

log 3,1457 = 0,49762 } ... diff. 14, 7 . 14 = 98
10 } hier = 100

log 6809 = 3,83308

4,33080

0,88731 — 7

7714 28

6 | 30 | 5 fünfte Ziffer

also Zahl des Log. 0,88731 — 7 = 0,00000077145

60) $(\frac{51}{43})^7 = 3{,}3014$ oder genauer $3{,}301504$

denn $\log (\frac{51}{43})^7 = 7\,(\log 51 - \log 43)$

$\log 51 =$	2,70757	oder $=$	2,7075702
$\log 43 =$	2,63347	$=$	2,6334685
	0,07410		0,0741017
	7		7
	0,51870		0,5187119
	3301 65		3301 . . . 6455
Diff.	13 | 50 | 4	Diff.	1316 | 6640 | 504
			6580
			6000

Wobei eine Tafel benützt wurde, welche die Log. nur bis10000 ohne Proportionaltheile enthält.

61) $\frac{824{,}37 \,.\, 7689{,}1}{2{,}4132 \,.\, 5{,}2134 \,.\, 31{,}246} = 16124{,}6$

62) $\frac{9081{,}2}{3{,}5812 \,.\, 10{,}147} = 249{,}894$

63) $\frac{712{,}56 \,.\, 83.429}{4321{,}5} = 1{,}3756$

64) $(\frac{2}{3})^{21} = 11{,}86322$, mittels 5 ziff. Log. nur 11,862

65) $\sqrt[5]{13} = 1{,}670278 \ldots$

Berechnung: $\log \sqrt[5]{13} = \frac{1}{5} \log 13 = \frac{1}{5} . 1{,}1139434$

$= 0{,}2227887$

7685	. . . 16702
202	
181	 7
210	
207	 8

wobei eine Tafel benützt wurde, die, wie die Vegaische, die Log. bis 100000 und die Proportionaltheile angiebt.

66) 68) $\sqrt[3]{17705\frac{2}{5}} = 26{,}06356$

67) 69) $(3017\frac{3}{4})^{0{,}7} = 272{,}75846$

Berechnung. $\log (3017\frac{3}{4})^{0,7} = 0,7\,(\log 12071 - \log 4)$

$\log 12071 = 4,0817432$

$\log 4 = 0,6020600$

$3,4796832$

$0,7$

$2,43577824$

$27275 \ldots = \ldots 7648$

134

$8 \ldots \ldots 127$

74

$4 \ldots \ldots 64$

100

$6 \ldots \ldots 95$

68) $\sqrt[4]{\frac{(3456,7)^3}{(891,01 \,.\, 11,213)^2}} = 4,5076$

69) $\sqrt[7]{\frac{(9512,1)^8}{(102,69 \,.\, 14,312 \,.\, 2,6961)^3}} = 1010,7$

Berechnung. Der Log. des Ausdrucks ist:

$\frac{1}{7}\,(8 \log 9512,1 - 3\,[\log 102,69 + \log 14,312 + \log 2,6961])$

Also nach der 5zifferigen Tafel:

$\log 9512,1 = 3,97827$ } Diff. 5
1 }

$3,97828 \mid 8$mal

$31,82624$ (A

$\log 102,69 = 2,01115$ } Diff. 42
38 }

$\log 14,312 = 1,15564$ } Diff. 30
6 }

$\log 2,6961 = 0,43072$ } Diff. 16
2 }

$3,59797$ dieß 3mal genommen

giebt: $10,79391$ abgezogen von (A

bleibt $7 \mid 21,03233$

$3,00462$

$432 \ldots 1010$

diff. $43 \mid 300 \mid \ldots\ldots 7$

70) $\sqrt[11]{\frac{(246{,}81 \cdot 13{,}579)^3}{(61{,}014 \cdot 9{,}2481)^2}} = 2{,}8917$

71) $\sqrt[7]{(45 - \sqrt[3]{19})} = 3{,}625853 \ldots$ 71) $\sqrt[3]{(45+\sqrt[3]{19})}$

Berechnung:

$\log \sqrt[3]{19} = \frac{1}{3} \log 19 = 0{,}4262512$

26684 2509

30

01 16

also $\sqrt[3]{19} = 2{,}668401$

Dazu 45

so ist die Zahl unter dem Wurzelzeichen = 47,668401

Also $\log \sqrt[3]{47{,}668401} = \frac{1}{3} \log 47{,}668401$

47668 6782269

4 36

3 | 1,6782305

0,5594102

36258 4038

64

5 60

40

3 36

72) $\sqrt[5]{(9{,}921 - 3\sqrt{5{,}02})} = 1{,}261866 \ldots$

73) $\frac{\sqrt[3]{0{,}2} + \sqrt[2]{0{,}005}}{\sqrt[3]{245}} = 0{,}10475 \ldots$

Berechnung.

$\frac{1}{3} \log 0{,}2 = \frac{1}{3}(0{,}30103 - 1) = \frac{1}{3}(2{,}30103 - 3) = 0{,}76701 - 1$

5848 701

also $\sqrt[3]{0{,}2} = 0{,}58480 \ldots$

$\frac{1}{2} \log 0{,}005 = \frac{1}{2}(0{,}69897 - 3) = \frac{1}{2}(1{,}69897 - 4) = 0{,}84949 - 2$

70711 48

1

Diff. 6

Also $\sqrt[2]{0{,}005} = 0{,}070711$

$\frac{1}{3} \log 245 = \frac{1}{3} . 2{,}38917 = 0{,}79639$

Da nun der Zähler des Ausdrucks

$0{,}5848 + 0{,}07071 = 0{,}65551$ ist, so ist zu berechnen

$$\log \frac{0{,}65551}{\sqrt[3]{245}} = \log 0{,}65551 - \tfrac{1}{3} \log 245$$

Aber $\log 0{,}65551 = 0{,}81657 - 1$

$\frac{1}{3} \log 245 = 0{,}79639$

$0{,}02019 - 1$

1047 . . . 01995 Diff. 4.

5 . . . 24

Also die gesuchte Zahl 0,10475.

Drittes Kapitel.

Algebra.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Aufgaben im Allgemeinen.

258) Die Arithmetik beschäftigt sich mit den Verbindungen der Zahlen unter einander und der Anwendung derselben auf Bestimmung und Vergleichung der Größen selbst. Ihre Sätze lassen sich, wie wir bisher gesehen haben, kurz durch Gleichungen bezeichnen, da sie immer nichts weiter ausdrücken, als daß eine Art der Verbindung der Größen oder Zahlen dasselbe Ergebniß liefert, wie eine andere. Z. B.

$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$$

$$m\sqrt{a} = \sqrt{m^2 a}$$

Alle diese Gleichungen gründen sich blos auf das Wesen der Verbindung selbst und können ohne weitere Bedingung aus der Erklärung der Verbindung abgeleitet werden. Man heißt sie analytische oder arithmetische Gleichungen; analytische, weil sie auf richtige Weise zergliedert den Grund ihrer Richtigkeit in sich selbst haben; arithmetische, weil jede Seite derselben eine Anweisung enthält, dieselbe Zahl durch gewisse Verbindungen anderer zu erzeugen.

So oft nun von einer Größe oder Zahl angegeben ist, durch welche der bisher betrachteten Verbindungen anderer Zahlen oder Größen sie erzeugt werden soll, so kann diese Größe oder Zahl durch ein arithmetisches Verfahren gefunden

werden, und man kann sie, da dieses Verfahren selbst möglich ist, als gegeben ansehen. Ist z. B. eine Zahl die Summe, der Unterschied, das Product, der Quotient zweier andern, so ist sie nicht blos völlig bestimmt, sondern auch bereits gegeben. Eben dieses tritt ein, wenn ich weiß, daß eine verlangte Zahl eine Wurzel, eine Potenz, ein Logarithmus einer andern ist.

Beispiele:

1) Hat A so viel als B und C zusammen und hat B 3000 fl. C 9000 fl., so hat A 12000; bezeichnet man das, was A hat, durch x (das Unbekannte soll immer durch die letzten Buchstaben des Alphabets, das Bekannte in allgemeinen Betrachtungen durch die ersten Buchstaben bezeichnet werden), so kann man schreiben:
$$x = 9000 + 3000$$
2) Was ist die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt 6400 Quadratfuß beträgt? A. die zweite Wurzel aus 6400 oder 80. Dieß läßt sich so andeuten: $x = \sqrt[2]{6400}$.
3) Was ist der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Kante 4′ lang ist? A. er hat so viel Cubikfuß, als die 3te Potenz von 4 Einheiten hat, also 64 Cub. Fuß. Hier ist also $x = 4^3$

Solche Aufgaben bedürfen blos einer Berechnung keiner weitern Betrachtung oder Auflösung und man kann sie daher arithmetische Aufgaben im engern Sinne nennen.

259) Ist dagegen die unbekannte Zahl oder Größe Summand, Minuend, Subtrahend, Factor, Dividend, Divisor, Grundzahl, Zahl, aus welcher man die Wurzel ausziehen soll, Exponent, oder ist blos angegeben, wie sie mit andern zur Erzeugung bestimmter Zahlen wirkt, ohne daß man weiß, wie sie selbst aus gegebenen Zahlen oder Größen entspringt, so kann zwar die Zahl völlig bestimmt sein, d. h. es kann nur eine Zahl geben, welche der aufgestellten Verbindung entspricht, aber sie ist nicht gegeben, d. h. man hat weder sie selbst, noch eine Anweisung, wie sie zu

berechnen sei. Man muß alsdann aus der gegebenen Verbindung der Zahlen eine neue Zusammenstellung abzuleiten suchen, so daß nun die unbekannte Zahl einer Verbindung von bekannten gleich, also eine Summe, eine Differenz, ein Product, ein Quotient, eine Potenz, eine Wurzel aus bekannten Zahlen wird.

260) Beispiele werden hier die allgemeine Betrachtung am besten einleiten.

1) A sei 37 J. alt, C so alt als A und B zusammen genommen und man weiß, daß er 70 J. alt ist; was ist das Alter von B?

Auflösung.

a) in Worten:	b) in Zeichen:
1) Das Alter von C oder 70 ist die Summe des Alters von A und B oder von 37 und der gesuchten Zahl.	1) $37 + x = 70$
2) Zieht man also von dem Alter des C, oder von 70 das Alter des A oder 37 ab, so hat man das gesuchte Alter des B oder 33 Jahre.	2) $x = 70 - 37 = 33$

2) Einer verliert von 35 fl., die er bei sich hat, um 5 fl. weniger als Tags zuvor und behält 9 fl. übrig, wie viel hat er am vorigen Tag verloren?

1) Denkt man sich 5 fl. weniger als den vorigen Verlust von 35 fl. weggenommen, so hat man den Rest von 9 fl.	1) $35 - (x - 5) = 9$
2) 35 fl. besteht also aus dem Rest von 9 fl. und dem Ueberschuß des gestrigen Verlusts über 5 fl.	2) $35 = 9 + (x - 5)$
3) Dieser Ueberschuß ist also der Rest von 35 weniger 9 oder 26 fl.	3) $35 - 9 = x - 5$ oder $26 = x - 5$

4) Also ist der gestrige Verlust selbst 26 mehr 5 fl. oder 31 fl.

4) $26 + 5 = 31 = x$

3) Wenn der dritte Theil einer Zahl 27 ist, was ist die Zahl selbst?

1) Der dritte Theil einer Zahl ist 27.

1) $\frac{x}{3} = 27$

2) Die Zahl ist also 3mal 27.

2) $x = 3.27$

4) Wenn 7 ℔., 11 ℔. und 13 ℔. einer Waare zusammen 310 fl. kosten, wie viel kostet 1 ℔.?

1) 7 mal, 11 mal und 13 mal der Preis eines Pfundes ist 310 fl.

1) $7x + 11x + 13x = 310$

2) 31mal der Preis eines Pfundes ist also 310 fl.

2) $(7 + 11 + 13)\,x = 31x = 310$

3) Der Preis eines Pfundes ist also der 31ste Theil von 310 oder 10 fl.

3) $x = \frac{310}{31} = 10$.

5) Einer giebt den dritten Theil seines Einkommens auf Kost und Kleidung, den achten auf Miethe und Holz, den neunten auf die übrigen Ausgaben; wenn ihm nun jährlich 310 fl. übrig bleiben, wie viel beträgt sein Einkommen?

1) Der dritte, der achte und der 9te Theil des Einkommens geben mit 310 zusammen das Einkommen selbst.

1) $\frac{x}{3} + \frac{x}{8} + \frac{x}{9} + 310 = x$

oder $\frac{1}{3}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{9}x + 310 = x$

2) Der dritte, der achte und der neunte Theil einer Größe sind aber $4\frac{1}{2}$ dieser Größe: es ist also $\frac{4}{5}\frac{1}{2}$ des Einkommens mehr dem Ueberschuß von 310 fl. das Einkommen selbst.

1) $(\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9})\,x + 310 = x$

oder $4\frac{1}{2}x + 310 = x$

3) Nimmt man also vom ganzen Vermögen $\frac{4}{7}\frac{1}{2}$ desselben weg, so bleibt der Ueberschuß oder 310 fl.

3) $310 = x - \frac{4}{7}\frac{1}{2}x$

4) Vom Ganzen $\frac{3}{7}\frac{1}{2}$ weggenommen, giebt $\frac{3}{7}\frac{1}{2}$. Es ist also 310 fl. $\frac{3}{7}\frac{1}{2}$ des Einkommens.

4) $310 = (1 - \frac{3}{7}\frac{1}{2})\,x = \frac{3}{7}\frac{1}{2}\,x$

5) Das Einkommen selbst ist also $\frac{7}{3}\frac{7}{1}$ des Rests von 310 fl. oder 720 fl.

5) $310 . \frac{7}{3}\frac{7}{1} = x$, $720 = x$

6) Wenn man für 240 fl. eine Anzahl Centner kaufte, ein anderes Mal doppelt so viele und man weiß, daß der Preis eines Zentners der ersten und zweiten Art zusammen 15 fl. war, wie viel waren es Centner im ersten Fall?

1) Der Preis eines Centners der ersten Art ist 240 fl. durch die Anzahl der Centner getheilt; bei der zweiten Art durch die doppelte Anzahl der Centner getheilt: und beide Theile zusammen sind 15 fl.

1) $\frac{240}{x} + \frac{240}{2x} = 15$

2) Der Preis eines Centners der zweiten Art ist auch die Hälfte von 240 fl. durch die halbe Anzahl dieser Centner oder durch die erste Anzahl getheilt. Also ist dann 240 fl. und 120 fl. durch die erste Anzahl der Centner getheilt zusammen 15 fl.

2) $\frac{240}{x} + \frac{120}{x} = 15$

3) Würde ich beide Zahlen nicht durch die Anzahl der Centner theilen, so betrügen sie 15 fl. mit dieser Anzahl der Centner multiplicirt. Es wäre also 240 und 120 fl. oder 360 fl. diese Zahl mal 15 fl.

3) $240 + 120 = 15\,x$
oder $360 = 15\,x$

4) Es ist also der 15te Theil von 360, oder 24, der gesuchten Zahl der ersten Centner gleich.

4) $\frac{3}{1}\frac{6}{5}\frac{0}{} = x$, $24 = x$

Probe:

Der 24ste Theil von 240 fl. ist 10
der 48ste Theil von 240 ist 5:
zusammen, wie verlangt, 15 fl.

$\frac{240}{24} + \frac{240}{48} = 15$

7) Man soll 46 so in zwei ungleiche Theile theilen, daß, wenn der eine durch 7, der andere durch 3 dividirt wird, die Quotienten zusammen 10 ausmachen. Welches sind die Theile?

Vorbereitung. Was auch der eine Theil sei, immer ist der andere 46 weniger dem ersten.

1) Es soll also eine unbekannte Zahl Zahl durch 3 getheilt und vermehrt um den durch 7 getheilten Unterschied zwischen 46 und der ersten Zah 10 machen.

1) $\frac{x}{3} + \frac{46-x}{7} = 10$

2) Der 7te Theil des Unterschieds zwischen 46 und der gesuchten Zahl ist aber ein 7tel von 46 oder $6\frac{4}{7}$ weniger dem 7ten Theil der gesuchten Zahl und es muß also $\frac{1}{3}$ weniger $\frac{1}{7}$ der gesuchten Zahl vermehrt um $6\frac{4}{7}$ die 10 ausmachen.

2) $\frac{x}{3} + \frac{46}{7} - \frac{x}{7} = 10$

3) Da aber $\frac{1}{3}$ weniger $\frac{1}{7}$ einer Zahl $\frac{4}{21}$ dieser Zahl ist, so ist $\frac{4}{21}$ des ersten Theils mehr $6\frac{4}{7}$ der 10 gleich.

3) $\frac{4}{21}x + 6\frac{4}{7} = 10$

4) Es ist also $\frac{4}{21}$ des gesuchten ersten Theils 10 weniger $6\frac{4}{7}$ oder $3\frac{3}{7}$.

4) $\frac{4}{21}x = 10 - 6\frac{4}{7} = 3\frac{3}{7}$

5) Es ist also der erste Theil selbst $\frac{21}{4}$ von $3\frac{3}{7}$ oder 18.

5) $x = 3\frac{3}{7} \cdot \frac{21}{4} = 18$

6) Der zweite Theil ist also 46 weniger dem ersten Theil, oder 46 weniger 18 oder 28.

6) $46 - x = 46 - 18 = 28$

Probe: $46 = 28 + 18$.

8) Die Summe zweier Zahlen und ihr Unterschied ist bekannt, wie groß sind die Zahlen?

1) Fügt man den Unterschied beider Zahlen zur Summe hinzu, so ist dieß eben so viel, als ob man die größere Zahl hinzufügte, die kleinere abzöge. Es ist also zweimal die größere Zahl der Summe mehr dem Unterschiede gleich.

$$\begin{array}{l} 1)\ x + y = a \\ \quad x - y = d \\ \hline 2x = a + d \end{array}$$

2) Die größere Zahl ist also gleich der halben Summe mehr dem halben Unterschied.

$$2)\ x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$$

3) Zieht man von der größern den Unterschied ab, so erhält man die kleinere. Von der halben Summe und dem halben Unterschied der ganze Unterschied weggenommen, giebt die halbe Summe weniger dem halben Unterschied als Werth der kleinern Zahl.

$$3)\ \frac{a}{2} + \frac{d}{2} - d = \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = y$$

Andere Auflösung.

1) Ist eine Zahl der Unterschied zweier anderer, so ist die größere dem Unterschied mehr der kleinern gleich. Die Summe ist also dann die kleinere Zahl mehr dem Unterschied (als Werth der größern) mehr der kleinern Zahl: also zweimal die kleinere Zahl mehr dem Unterschied.

1) Es sei a Summe,
d Unterschied
x kleinere Zahl,
x + d größere,
x + d + x = a
2x + d = a

2) Es ist also zweimal die kleinere Zahl der Summe weniger dem Unterschiede gleich.

$$2)\ 2x = a - d$$

3) Die kleinere Zahl selbst ist also die halbe Summe weniger dem halben Unterschiede. 3) $x = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$

4) Die größere Zahl, welche der kleinern mehr dem Unterschiede gleich ist, enthält also die halbe Summe weniger dem halben Unterschiede mehr dem ganzen Unterschiede: das heißt die halbe Summe mehr dem halben Unterschiede. 4) $x + d = \frac{a}{2} - \frac{d}{2} + d$
$= \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

Probe:

$$\frac{a}{2} + \frac{d}{2} + \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = a$$

$$\frac{a}{2} + \frac{d}{2} - \left(\frac{a}{2} - \frac{d}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{d}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2} = d$$

9) Angenommen 19 Loth Gold wiegen im Wasser nur 18 Loth, 10 Loth Silber nur 9 Loth; so fragt sich, wie viel Gold und Silber in einer Masse von 48 Lothen enthalten ist, wenn sie im Wasser gewogen nur 245 Loth schwer ist.

Vorbereitung. Gold verliert also $\frac{1}{19}$, Silber $\frac{1}{10}$ am Gewicht; die gegebene Masse verlor 3 Loth, was mehr als $\frac{1}{19}$ und weniger als $\frac{1}{10}$ von 48 ist: sie muß also aus Gold (x) und Silber (y) bestehen und der Verlust an beiden muß 3 Loth betragen.

1) Beide Werthe betragen zusammen 48 Loth. 1) $x + y = 48$

2) Ihre Verluste oder $\frac{1}{10}$ des Silbers und $\frac{1}{19}$ des Goldes machen 3 Loth. 2) $\frac{x}{19} + \frac{y}{10} = 3$

3) $\frac{1}{10}$ von der Menge des Silbers ist also 3 weniger $\frac{1}{19}$ der Menge des Goldes oder die Menge des Silbers selbst ist 30 weniger $\frac{10}{19}$ von der Menge des Goldes. 3) $\frac{y}{10} = 3 - \frac{x}{19}$
oder $y = 30 - \frac{10}{19}x$

4) Dieser Unterschied (als Betrag des Silbers um die Menge des Goldes vermehrt) giebt 30 und $\frac{9}{19}$ der Menge des Goldes und ist der Betrag der Masse selbst oder 48 L.

4) $x + 30 - \frac{10}{19} x = 48$

oder $30 + \frac{9}{19} x = 48$

5) Also ist $\frac{9}{19}$ von der Menge des Goldes 48 weniger 30 oder 18 L. Also ist das Gold selbst $\frac{1}{9}$ von 18 L. oder 38 L.

5) $\frac{9}{19} x = 48 - 30 = 18$

$x = \frac{1}{9} . 18 = 38$

6) Also ist die Menge des Silbers 48 weniger 38 oder 10 L.

6) $y = 48 - x = 48 - 38$

Probe: $38 + 10 = 48$

$\frac{38}{19} + \frac{10}{10} = 3$

Andere Auflösung:

a) wörtlich.

Wäre die ganze Masse Silber, so hätte der Verlust $\frac{1}{10}$ von 48 Loth oder $4\frac{4}{5}$ Loth betragen. Da er aber nur 3 Loth beträgt, so muß der Minderverlust von $1\frac{4}{5}$ Loth vom Golde herrühren, das in der Mischung ist und das man unrichtig als Silber angenommen hat. Als Gold würde diese Masse $\frac{1}{19}$ verlieren, folglich $\frac{1}{10} - \frac{1}{19}$ oder $\frac{9}{190}$ weniger als Silber. So oft also $\frac{9}{190}$ oder der Zuviel-verlust jedes einzelnen Lothes Gold in $1\frac{4}{5}$ Loth enthalten ist, so viel Loth Gold muß die Mischung haben. Dieß ist aber 38 mal der Fall: die Mischung hat also 38 Loth Gold. Und da Gold und Silber zusammen 48 Loth betragen, so hat sie 48 weniger 38 oder 10 Loth Silber.

b) In Zeichen:

Gold ausser dem Wasser sei x

Silber — — — — 48 — x

Verlust des Goldes $\frac{x}{19}$

Verlust des Silbers $\frac{48}{10} - \frac{x}{10}$

also $\frac{x}{19} - \frac{x}{10} + \frac{48}{10} = 3$

oder $4\frac{4}{5} - 3 = \frac{x}{10} - \frac{x}{19} = \frac{9}{190} x$

also $\frac{\frac{14}{5}}{\frac{9}{190}} = x$ oder $x = 38$

= = also Silber $48 - 38 = 10$.

10) 3 Scheffel Waizen und 4 Scheffel Roggen kosteten zusammen 58 fl.; 5 Scheffel Waizen und 7 Scheffel Roggen zu denselben Preisen zusammen 99 fl.; wie theuer kam der Scheffel Waizen und der Scheffel Roggen?

Erste Auflösung. Es sei x Waizenpreis, y Kornpreis so ist:

1) a. Dreimal der Waizenpreis mehr 4mal dem Kornpreis ist 58 fl. $3x + 4y = 58$

b) 5mal der Waizenpreis mehr 7mal dem Kornpreis ist 99 fl. $5x + 7y = 99$

2) Aus a) folgt, daß 3mal der Waizenpreis 58 fl. weniger 4mal dem Kornpreise gleich ist, somit der Waizenpreis selbst $\frac{1}{3}$ von 58 oder $19\frac{1}{3}$ weniger $\frac{1}{3}$ von 4mal dem Roggenpreise oder $\frac{4}{3}$mal dem Roggenpreise. $3x = 58 - 4y$ $x = 19\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y$

Aus b) folgt, daß 5 mal der Waizenpreis 99fl. weniger 7mal der Kornpreis ist, folglich der einfache Waizenpreis $\frac{1}{5}$ von 99 fl. oder $19\frac{4}{5}$ fl. weniger $\frac{1}{5}$ von 7mal dem Roggenpreise oder $\frac{7}{5}$mal dem Roggenpreise. $5x = 99 - 7y$ $x = 19\frac{4}{5} - \frac{7}{5}y$

3) Es ist also $19\frac{1}{3}$fl. weniger $\frac{4}{3}$mal dem Kornpreise eben so viel als $19\frac{4}{5}$ weniger $\frac{7}{5}$ mal der Kornpreis ist. $19\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y = 19\frac{4}{5} - \frac{7}{5}y$

4) Es ist also der Unterschied zwischen $19\frac{4}{5}$ und $19\frac{1}{3}$ gleich dem Unterschiede zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{7}{5}$mal dem Roggenpreise. $\frac{7}{5}y - \frac{4}{3}y = 19\frac{4}{5} - 19\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}y = \frac{7}{15}$

Oder $\frac{7}{15}$ fl. ist gleich $\frac{1}{15}$ des Roggenpreises.

5) Also 15 mal $\frac{7}{15}$ fl. oder 7 fl. der Roggenpreis selbst. $y = \frac{7}{15} = 7$

6) Der Waizenpreis ist also $19\frac{1}{2}$ weniger $\frac{4}{3}$mal 7 oder $19\frac{1}{3}$ weniger $9\frac{1}{3}$ oder 10 fl. $x = y = 19\frac{1}{2} - \frac{4}{3}.7 = 10$

7) Probe: $3.10 + 4.7 = 58$

$5.10 + 7.7 = 99$

Andere Auflösung.

2) Aus a) folgt, daß 15mal der Waizenpreis mehr 20mal der Kornpreis 290 fl. sind. $15x + 20y \quad 290$

Aus b) daß 15 mal der Waizen- und 21mal der Kornpreis 297 fl. sind. $15x + 21y = 297$

3) Es ist also der Unterschied zwischen 297 und 290 oder 7 fl. dem gleich was übrig bleibt, wenn man von 15 mal dem Waizen- und 21mal dem Kornpreise wegnimmt 15mal den Waizen- mehr 20 mal dem Kornpreis. Hier bleibt aber 1mal der Kornpreis. Dieser ist also 7 fl.

$15y + 21y - (15x + 20y$

$= 297 - 290$

$15x + 21y - 15x - 20y = 7$

$(21 - 20)\, y = y = 7$

4) Es ist also 3mal der Waizenpreis mehr 4 mal dem Roggenpreis oder 28 so viel als 58. Daher 3mal der Waizenpreis 58 weniger 28 oder 30, somit der Waizenpreis $\frac{1}{3}$ von 30 oder 10.

$3x + 4.7 = 58$

$3x + 28 = 58$

$3x = 58 - 28 = 30$

$x = \frac{30}{3} = 10$

Andere Auflösung.

2) Aus a) folgt, daß der Waizenpreis $\frac{1}{3}$ von 58 oder $19\frac{1}{3}$ weniger $\frac{4}{3}$ des Kornpreises ist. $x = \frac{58}{3} - \frac{4}{3}y = 19\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y$

3)	Also ist 5mal der Waizenpreis 5mal $19\frac{1}{3}$ oder $96\frac{2}{3}$ weniger 5mal $\frac{4}{3}$mal der Kornpreis oder $\frac{20}{3}$ mal der Kornpreis.	$5x = 96\frac{2}{3} - \frac{20}{3}y$
4)	5 mal der Waizenpreis mehr 7mal der Kornpreis oder 99 ist also $96\frac{2}{3}$ weniger $\frac{20}{3}$ mal der Waizenpreis mehr 7 mal der Waizenpreis.	$96\frac{2}{3} - \frac{20}{3}y + 7y = 99$
5)	Es ist also 7mal weniger $6\frac{2}{3}$mal der Waizenpreis der Ueberschuß von 99 über $96\frac{2}{3}$ oder $2\frac{1}{3}$. Oder $\frac{1}{3}$ des Kornpreises ist $2\frac{1}{3}$ fl.	$(7-6\frac{2}{3})y = 99 - 96\frac{2}{3} = 2$ $\frac{1}{3}y = 2\frac{1}{3}$
6)	Somit der Kornpreis selbst 3mal $2\frac{1}{3}$ oder 7 fl.	$y = 3 \cdot 2\frac{1}{3} = 7$
7)	Und hieraus der Waizenpreis wie oben.	

11) Welche Zahl gibt mit ihrem 3tel multiplicirt 12?

1)	Ist eine Zahl mit ihrem Drittel multiplicirt 12, so ist	$x \cdot \frac{x}{3} = 12$
2)	die Zahl mit sich selbst multiplicirt oder das Quadrat derselben 3mal 12 oder 36.	$x^2 = 36$
3)	Es ist also die Zahl die 2te Wurzel aus 36 oder 6.	$x = \sqrt{36} = 6$

12) Von welcher Zahl machte $\frac{2}{3}$ der 3ten Wurzel 22?

1)	Machen $\frac{2}{3}$ der 3ten Wurzel 22, so ist	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{x} = 22$
2)	die 3te Wurzel $\frac{3}{2}$ von 22 oder 33.	$\sqrt[3]{x} = \frac{3}{2} \cdot 22 = 33$
3)	Die Zahl selbst ist also 33 zur dritten Potenz oder 35937.	$x = 33^3 = 35937$

261) Alle diese Aufgaben, N. 8. ausgenommen, sind in bestimmten Zahlen gegeben, und man verlangt zu wissen, wie bekannte Zahlen in jedem angegebenen Falle verbunden werden sollen, um die unbekannte zu erzeugen.

Es lassen sich aber für jede in bestimmten Zahlen gegebene Aufgabe unzählige gleichartige denken, die alle auf gleiche Weise aufgelöst werden. Für die 5te Aufgabe wäre ein anderes Beispiel: Einer gibt den 7ten, 5ten und 10ten Theil seines Einkommens aus und behält doch 250 fl. übrig; wie viel nimmt er ein? Alle diese Beispiele gehören aber als besondere Fälle unter die allgemeine Frage:

Wenn von einer gewissen Zahl ein gewisser erster, zweiter und dritter Theil weggenommen wird und es bleibt doch eine Zahl Rest, wie groß ist diese Zahl?

1) Offenbar wäre auch hier das Ganze vermindert um jene Theile zusammen dem Rest gleich.
2) Alle diese Theile gleichbenannt und vom Ganzen abgezogen, ließen eine Anzahl Theile übrig gleich dem Rest.
3) Der Rest wäre also mit dem gefundenen Hauptnenner zu multipliciren und durch den Zähler zu dividiren, so hätte man den Betrag des Ganzen selbst.

So undeutlich diese allgemeine Betrachtung in Worten ist, so anschaulich läßt sie sich in allgemeinen Zeichen darstellen. Es ist dann

1) $a = x - \left(\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p}\right)$

2) $a = x - \frac{np + mp + mn}{mnp} x$

3) $a = \frac{mnp - np - mp - mn}{mnp} x$

$$\frac{amnp}{mnp - np - mp - mn} = x$$

Wie die allgemeine Auflösung in Worten, so gibt auch diese Bezeichnung derselben in allgemeinen Zeichen in dem Ausdruck, den sie gleich x findet, die Weise an, wie man, wenn bestimmte Zahlen gegeben sind, aus ihnen die unbekannte berechnen soll. Der allgemeine Ausdruck für x enthält nur die Form, nach welcher die Rechnung mit Zahlen zu führen ist, und heißt deßhalb auch eine Formel für x.

Setzt man für	
m	3
n	8
p	9
a	310

so hat man: $\frac{310.8.9.3}{3.8.9-8.9-3.9-3.8} = \frac{72.310}{31} = 720$

wie oben gefunden worden.

Aber durch diese Formel ist nun jede ähnliche, in bestimmten Zahlen gegebene Aufgabe gelöst. Denn setzt man wie in obigem Beispiel

m	7
n	5
p	10
a	250

so ist $x = \frac{250.10.5.7}{10.5.7-5.10-7.10-7.5} = \frac{70.250}{39} = \frac{17500}{39} = 448\frac{28}{39}$

Eben so ist oben das 8te Beispiel schon allgemein gelöst worden und hat zwei Formeln für x und y gegeben.

Hieraus ersieht man, daß die Auflösung allgemeiner Aufgaben nur darin von der Auflösung besonderer verschieden ist, daß hier die Rechnungen sogleich vorgenommen werden, welche man dort nur vorschreibt; daß aber eben darin der große Vortheil liegt, welchen allgemeine Auflösungen gewähren, daß mittels ihrer, ohne Zwischenrechnung, der ganze Gang des Verfahrens überblickt wird und das Ergebniß alle mögliche ähnliche Fälle umfaßt.

262) Diese Beispiele zeigen zur Genüge, was bei der Auflösung einer Aufgabe geschieht. Man zieht nämlich aus der Bedingung eine bestimmte Vergleichung von Zahlen, unter welchen die unbekannte vorkommt und verändert diese so lange nach dem Satze, daß Gleiches gleich verändert, Gleiches gibt, bis man einen Ausdruck bekannter Zahlen hat, welcher der unbekannten gleich ist. Zugleich sieht man aber auch die Schwierigkeiten, welche beim Gebrauch der Worte sich entgegenstellen, und wie diese wachsen, wenn die Aufgabe selbst verwickelter wird. Alle Sätze einer Auflösung enthielten aber nichts anderes, als eine Gleichsetzung zweier Zahlverbindungen; sie ließen sich also immer als Gleichung darstellen, wie rechts geschehen ist. Jede Auflösung kann hiernach in ei-

ner Reihe von Gleichungen bezeichnet werden, deren jede aus der vorhergehenden nach dem allgemeinen Gesetze abgeleitet ist, daß Gleiches gleichverändert Gleiches giebt.

263) Würde man blos die Erleichterung durch die Gleichungen haben, daß man die wörtlichen Sätze kürzer bezeichnete, so wäre sie zwar bedeutend; doch aber die Ablesung zusammengesetzter Ausdrücke zeitraubend, das Behalten so vieler verschiedener Größen und Zahlen mit ihren Verbindungen und das Ableiten jeder folgenden Gleichung je nach der Beschaffenheit und Verbindung der Größen beschwerlich, oft unmöglich. Die Vortheile, welche man durch die Gleichungen genießt, sind aber weit bedeutender.

Betrachtet man nämlich irgend eine der gegebenen Auflösungen z. B. Aufg. 5, so erhellet, daß aus der ersten Gleichung so lange eine neue abgeleitet wurde, bis auf der einen Seite das Zeichen der unbekannten Zahl allein, auf der andern eine Verbindung bekannter Zahlen stand.

Aus $\frac{x}{3} + \frac{x}{8} + \frac{x}{9} + 310 = x$ wurde $720 = x$

Hat man nun die erste Gleichung, so geschieht die Umänderung derselben blos nach dem erwähnten Grundsatz von der Gleichveränderung des Gleichen, ohne daß man weiter nöthig hat, während dieser Ableitung neuer Gleichungen die Bedeutung im Gedächtniß zu behalten, welche den einzelnen Zahlen nach der Aufgabe zukommen.

Z. B. In der oben angeführten Gleichung

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{8} + \frac{x}{9} + 310 = x$$

bedenke man, daß die unbekannte Zahl am Ende auf der einen Seite allein stehen soll: es müssen also alle Ausdrücke, worin sie vorkommt, auf einer Seite, alle übrigen auf der andern zusammengestellt werden. Man muß also $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{8}$, $\frac{x}{9}$ da weg-schaffen, wo sie stehen. Dieß geschieht, wenn ich sie auf beiden Seiten subtrahire (29a und 30b). Man hat also:

$$310 = x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{8} + \frac{x}{9}\right)$$

Da aber x von allen übrigen Zahlen abgesondert werden soll, so fasse man zuerst alle die Ausdrücke zusammen (84), worin x vorkommt, so hat man:

$$310 = x - \tfrac{41}{72}x = (1 - \tfrac{41}{72})x = \tfrac{31}{72}x$$

Nun schaffe man den Factor $\frac{31}{72}$ rechts weg, was durch Division mit demselben auf beiden Seiten geschieht, nach 102 Z. und 105, so kommt:

$$\frac{310 \cdot 72}{31} = x, \quad \text{oder } 720 = x$$

Erinnert man sich nun, daß x in der Aufgabe fl. Einkommen sind, so bezeichnet die Zahl 720 Gulden.

Betrachtet man alle übrige Auflösungen, so wiederholt sich stets derselbe Gang, wie verschieden auch die wörtlichen Ausdrücke sein mögen, wenn nur die erste Gleichung gefunden ist. Diese findet man aber durch genaue Auffassung alles dessen, was von den Größen und Zahlen in der Aufgabe gesagt ist, mit Hinweglassung aller Nebendinge. Die Schwierigkeit liegt meist nur darin, daß, wie schon oben (31. a) bemerkt worden, die Sprache für dieselben arithmetischen Verbindungen viele verschiedene Ausdrücke hat. Allgemeine Regeln lassen sich hier nicht geben, sondern es kann allein durch Uebung Fertigkeit im Auffinden der ersten Gleichungen aus der Bedingung oder im Ansetzen der Aufgabe erlangt werden. Nur so viel sieht man, daß die Aufgabe eben so viele Gleichungen enthält, als unbekannte Zahlen in ihr gesucht sind. Hat man diese ersten Gleichungen, so ist statt der Auflösung der Aufgabe blos die Gleichung umzubilden, was man auch die Auflösung der Gleichungen nennt, die sich, wie im Folgenden gelehrt wird, auf allgemeine Regeln bringen läßt.

264) Offenbar tragen solche Gleichungen den Grund ihrer Richtigkeit nicht in sich selbst, sondern setzen irgend Zahl-Verbindungen einander unter der Voraussetzung gleich, daß die Zahlen eine gewisse Bedeutung haben. Solche Gleichungen heißt man wohl auch algebraische Gleichungen, so wie man unter dem Wort Algebra im engern Sinne die Lehre versteht, wie man aus gegebenen Zahlen oder Größen unbekannte finden könne. Im weitern Sinne versteht man aber überhaupt die Lehre von Zahlen und Größen darunter,

wenn sie in allgemeinen Zeichen dargestellt wird. Hier wurde das Wort im ersten Sinne gebraucht. Doch läßt sich keine völlig strenge Scheidung der Theile vornehmen, da zu manchen Theilen der allgemeinen Zahlenlehre die Lehre von der Bestimmung von Zahlen, die mit andern verbunden vorkommen, oder die Auflösung der Gleichungen nicht entbehrt werden kann, weßhalb denn diese unten in den Abschn. VII. bis IX. vorkommen.

Zweiter Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 1.

Allgemeine Regeln.

265) Die Gleichungen theilt man nun nach der Zahl der unbekannten Größen in Gleichungen mit einer und mit mehreren unbekannten Größen; nach dem Exponenten der unbekannten Zahl in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten und höherer Grade ein. Gleichungen vom zweiten Grade heißt man auch quadratische, vom dritten cubische.

266) Der allgemeine Grundsatz, nach welchem jede Gleichung umgeändert werden kann, ist:

Gleiches gleich verändert, gibt Gleiches.

Beide Seiten der Gleichung dürfen also

1) um Gleiches vermehrt oder vermindert (30. b);
2) mit Gleichem multiplicirt, getheilt und gemessen werden (86 und 105);
3) Man darf beide Seiten mit derselben Zahl potenziren, (204. Z. 4.) dieselbe Wurzel aus beiden ausziehen (213 Z.) und die Logarithmen beider sind für jedes System gleich (238).

267) Da es bei der Auflösung der Gleichung hauptsächlich darauf ankommt, daß die unbekannte Größe von den bekannten losgemacht werde, mit welchen sie verbunden ist, so sind folgende Regeln besonders wichtig.

I. Will man eine additive Größe wegschaffen, so muß man sie (29. a. oder 56.) subtrahiren. Geschieht dieß auf der einen Seite, so muß es auch auf der andern Seite der Gleichung geschehen, damit beide Seiten sich gleich bleiben.

Beispiel: $x+a=b$ $\quad x+7=12$

$x+a-a=b-a$ $\quad x+7-7=12-7$

oder $x=b-a$ $\quad x=5$

II. Eine subtractive Größe schafft man weg, wenn man sie addirt (27. a. oder 56). Geschieht dieß auf der einen Seite der Gleichung, so muß es auch auf der andern Seite geschehen, damit beide Seiten sich gleich bleiben. Z. B.

$x-a=b$ $\quad x-4=9$

$x-a+a=b+a$ $\quad x-4+4=9+4$

$x=b+a$ $\quad x=13$

III. Einen Factor schafft man dadurch auf der einen Seite weg, daß man mit ihm das Product dividirt, (102 Z. oder 115), worin er enthalten ist. Damit aber die Gleichung richtig bleibe, muß diese Division auf beiden Seiten vorgenommen werden. Man sagt also kurz: einen Factor schafft man weg, wenn man mit ihm beide Seiten der Gleichung dividirt.

$x.m=a$ $\quad 3.x=12$

$\frac{x.m}{m}=\frac{a}{m}$ $\quad \frac{3.x}{3}=\frac{12}{3}$

$x=\frac{a}{m}$ $\quad x=4$

IV. Einen Divisor schafft man weg, indem man mit ihm auf beiden Seiten multiplicirt nach (102 oder 115).

$\frac{x}{m}=x^{a}$ $\quad \frac{x}{4}=3$

$\frac{x}{m}.m=a.m$ $\quad \frac{x}{4}.4=3.4$

$x=a.m$ $\quad x=12$

V. Einen Potenzexponenten schafft man weg, indem man die eben so vielste Wurzel auszieht (224, A. u. 214.)

$x^m = a$ $\quad$ $x^3 = 8$

$\sqrt[m]{x^m} = \sqrt[m]{a}$ $\quad$ $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$

$x = \sqrt[m]{a}$ $\quad$ $x = 2$

VI. Einen Wurzelexponenten schafft man dadurch weg, daß man mit ihm auf beiden Seiten potenzirt (224, A. u. 204 Z. 4)

$\sqrt[m]{x} = a$ $\quad$ $\sqrt[2]{x} = 6$

$\left(\sqrt[m]{x}\right)^m = a^m$ $\quad$ $\left(\sqrt[2]{x}\right)^2 = 6^2$

$x = a^m$ $\quad$ $x = 36$

VII. Eine Grundzahl einer Potenz oder Wurzel läßt sich dadurch wegschaffen, daß man von beiden Seiten die Logarithmen aufsucht, die (238. Z.) gleich sind. Hiedurch wird die Grundzahl ein Factor, den man nach III. wegschafft. Z. B.

1) Ist $a^x = b$ $\quad$ $9^x = 729$

so ist (nach 247) $x \log a = \log b$ $\quad$ $x \log 9 = \log 729$

Daher nach III) $x = \frac{\log b}{\log a}$ $\quad$ $x = \frac{\log 729}{\log 9} = \frac{2,86273}{0,95424} = 3$

2) Ist $\sqrt[x]{a} = b$ $\quad$ $\sqrt[x]{125} = 5$

so ist (nach 248) $\frac{\log a}{x} = \log b$ $\quad$ $\frac{\log 125}{x} = \log 5$

$\log a = \log b \,.\, x$ $\quad$ $\log 125 = x \log 5$

$\frac{\log a}{\log b} = x$ $\quad$ $\frac{\log 125}{\log 5} = x = \frac{2,09691}{0,69897} = 3$

VIII. Ist die unbekannte Zahl in mehrern Ausdrücken zugleich als Factor vorhanden, so fasse man diese nach (84) zusammen und setze den gleichen unbekannten Factor heraus, damit er nur einmal vorkommt: darauf verfährt man nach III. weiter. Z. B.

1) $x \,.\, m + x \,.\, n - xp - x = a$

$x\,(m + n - p - 1) = a$

$x = \frac{a}{m + n - p - 1}$

2) $3x + 5x - x = 91$

$(3 + 5 - 1)\, x = 91$

$7x = 91$

$x = 13$

3) $\frac{x}{m}+\frac{x}{n}-\frac{x}{p}=a$, $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)x=a$ (nach 130 u. 84)

$\frac{np+mp-mn}{mnp}\cdot x=a$ (nach 141),

$x=\frac{a}{\frac{np+mp-mn}{mnp}}$ (nach III),

$x=\frac{amnp}{np+mp-mn}$ (nach 150). Oder:

$\frac{x}{m}+\frac{x}{n}-\frac{x}{p}=a$, $\frac{npx+mpx-mnx}{mnp}=a$ (nach 141)

$npx+mpx-mnx=amnp$ (IV),

$(np+mp-mn)\,x=amnp$ (nach 84)

$x=\frac{amnp}{np+mp-mn}$ (III).

4) $\frac{2x}{5}+\frac{9x}{7}-x=100$, $\frac{14x+45x-35x}{35}=100$ (n. 141)

$24x=3500$ (IV. u. 84), $x=\frac{3500}{24}=145\frac{5}{6}$ (III).

IX. Kommt die unbekannte Zahl mit andern Gliedern durch Addition oder Subtraction verbunden vor, so schaffe man zuerst (nach 67) alle Klammern weg und dann die Summanden oder Subtrahenden nach I. und II.

$a+(b-[c-x])=d$	$100-(7+[15-x])=92$
(n. 67) $a+b-c+x=d$	$100-7-15+x=92$
(I. II.) $x=d-a-b+c$	$x=92-100+7+15$
(n. 65) $x=(d+c)-(a+b)$	$x=(92+7+15)-100$
	$x=114-100=14$

X. Kommt die unbekannte Zahl als Subtrahend vor, so muß man sie dadurch zu einem Summanden (aus einer negativen zu einer additiven Zahl) machen, daß man sie nach II. auf der einen Seite wegschafft und dann weiter verfährt, wie es die Gleichung verlangt. Z. B.

$a-x=b$	$12-x=-17$
so ist (nach II) $a=b+x$	$12=-17+x$
(nach I) $a-b=x$	$29=12+17=x$

XI. Kommt die unbekannte Zahl im Divisor vor, so muß man diesen vorerst nach IV. wegschaffen, damit er auf der andern Seite der Gleichung ein Factor werde. Dadurch wird die unbekannte Zahl selbst entweder ein Factor

oder doch ein Theil eines Factors, worauf man dann nach III. oder wie unten in XIII. weiter verfährt. Z. B.

Ist $\frac{a}{x} = b$ $\frac{12}{x} = 4$

so ist (IV) $a = bx$ $12 = 4x$

(III) $\frac{a}{b} = x$ $3 = \frac{x^2}{4} = x$

XII. Kommt die unbekannte Zahl auf beiden Seiten der Gleichung vor, so schaffe man alle Glieder, worin sie enthalten ist, auf die Seite, wo x schon am öftesten vorkommt, und verfahre dann weiter, wie es erforderlich ist.

$ax = m - x$ $5x = 100 - 15x$

(II) $ax + x = m$ $5x + 15x = 100$

(VIII) $(a+1)\,x = m$ $(5+15)\,x = 100$

IV) $x = \frac{m}{a+1}$ $x = \frac{100}{20} = 5$

Anmerk. Bei der Beurtheilung, wo die unbekannte Zahl öfter vorkommt, ist (68) zu bedenken, daß eine negative Zahl im ganzen Ausdruck desto kleiner ist, je größer ihr Werth an sich ist.

XIII. Kommt die unbekannte Zahl als Theil eines Factors z. B. in $a(m+x)$ vor, so muß man die Klammer durch Multiplication wegschaffen (81), wenn sie auch außer dieser Verbindung noch in andern Gliedern enthalten ist. Außerdem genügt es, zuerst den äußern Factor wegzuschaffen (nach III.) und dann nach (I. II.) weiter zu verfahren.

1) $(x+m)\,n + px = q$ (nach 81)

$mn + px = q$

$x(m+p) = q - mn$ (nach VIII. und I.)

$x = \frac{q-mn}{m+p}$ (III)

2) $(5+x) \cdot 9 - 5x = 72$

$5 \cdot 9 + x \cdot 9 - 5x = 72$ (nach 81)

$x(9-5) = 72 - 45$ (nach VIII. und I.)

$x = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$ (nach III.)

3) $(a+x) \cdot n = p$

$a + x = \frac{p}{n}$ (III.)

$x = \frac{p}{n} - a$ (I.)

oder:

4) $(a+x)\,n = p$

$an + xn = p$ (81)

$xn = p - an$ (I.)

$x = \frac{p-an}{n}$ (III) $= \frac{p}{n} - a$ (118) wie in 3.

A. 1. Im letzten Falle ist es also gleichgiltig, welchen Weg der Auflösung man einschlägt, da das Ergebniß dasselbe ist, doch ist der erste etwas kürzer.

A. 2. Nach XI. und XIII. läßt sich auch folgender Fall behandeln:

$\frac{a}{m+x} = n$

$a = n(m+x)$ (XI.)

$\frac{a}{n} = m+x$ (III.)

$\frac{a}{n} - m = x$ (I.)

A. 3. Die Regel I. und II. drückt man oft der äußerlichen Ansicht nach so aus: Jedes Glied kann man auf der einen Seite der Gleichung weglassen, wenn man es mit entgegengesetztem Zeichen auf die andere Seite setzt. Daher kann man auch sagen: eine Gleichung ändere sich nicht, wenn man allen Gliedern auf beiden Seiten die entgegengesetzten Zeichen gebe.

A. 4. Soll ein Factor oder Divisor weggeschafft werden, so muß die Division oder Multiplication mit demselben alle Glieder der Gleichung treffen. Z. B.

1) $5x + 25 = 37$

$\frac{5x+25}{5} = \frac{37}{5}$

$x + 5 = 7\frac{2}{5}$ (nach 118)

$x = 7\frac{2}{5} - 5 = 2\frac{2}{5}$ (nach I.)

2) $\frac{x}{5} - 9 = 8$

$5.\left(\frac{x}{5} - 9\right) = 40$

$x - 45 = 40$ (nach 81).

$x = 40 + 45 = 85$ (nach II.)

3) $\frac{a}{x} + b = c$, $a + bx = cx$, $a = cx - bx$, $a = x(c-b)$,

$\frac{a}{c-b} = x$

oder besser:

$$\frac{a}{x} = c - b, \quad a = x\,(c-b), \quad \frac{a}{c-b} = x$$

A. 5. Diese Regel drückt man auch so aus: soll man mehrere Nenner zugleich wegschaffen, so multiplicire man beide Seiten der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Nenner. Z. B.

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} - \frac{p}{3n} = x$$

$$3mn\left(\frac{x}{m} + \frac{x}{n} - \frac{p}{3n}\right) = 3mnx$$

(nach XIII.) $3mn\,\frac{x}{m} + 3mn\,\frac{x}{n} - 3mn\,.\,\frac{p}{3n} = 3mnx$

(nach 137) $3nx + 3mx - mp = 3mnx$

(XII. u. II.) $3nx + 3mx - 3mnx = mp$

(VIII.) $3(n+m-mn)x = mp$

(III.) $$x = \frac{mp}{3(n+m-mn)}$$

A. 6. Die Regeln V., VI. und VII. sind nur dann anwendbar, wenn der Ausdruck, worin der Exponent oder die Grundzahl weggeschafft werden soll, auf der einen Seite allein steht. Dieß ist also, wenn es noch nicht der Fall ist, vorerst herzustellen. Z. B.

1) $\sqrt[n]{x} + b = a, \quad \sqrt[n]{x} = a - b, \quad x = (a-b)^n$

2) $\frac{x^n}{m} + n = d, \quad \frac{x^n}{m} = d - n, \quad x^n = m\,(d-n),$

$$x = \sqrt[n]{m(d-n)}$$

3) $a^x - b = c, \quad a^x = c + b, \quad x \log a = \log(c+b),$

$$x = \frac{\log(c+b)}{\log a}$$

269) Soll die unbekannte Größe richtig gefunden sein, so muß ihr Werth in die erste Gleichung für sie gesetzt, diese Gleichung zu einer identischen machen, d. h. auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens müssen nach gehöriger Umwandlung gleiche Zeichen stehen. Z. B. in A. 4. 3s B.

Aus $\frac{a}{x} + b = c$ fand sich $x = \frac{a}{c-b}$

Setzt man dieß für c in die gegebene Gleichung so kommt:

$$\frac{\frac{a}{a}}{c-b} + b = c, \quad \frac{a(c-b)}{a} + b = c \text{ (nach 150)},$$

$$c - b + b = c \text{ (137, 3)}, \quad c = c$$

§. 2.

Beispiele der Auflösung von Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

269) Wie diese Regeln jedesmal angewendet werden, bestimmt sich durch den Grundsatz, daß man auf dem kürzesten Wege die unbekannte Zahl auf der einen Seite allein erhalten soll, so daß sie also einem Ausdruck bekannter Größen gleich ist. Einige Uebung verschafft hier bald die erforderliche Fertigkeit.

1) $ax + \frac{x}{n} + c = -ax + d$

$ax + \frac{x}{n} + ax = d - c$ (I, XII und II.)

$(a + \frac{1}{n} + a)\, x = d - c$ (VIII.)

$(2a + \frac{1}{n})\, x = d - c$

$x = \frac{d-c}{2a+\frac{1}{n}}$ (III.)

2) $\frac{a+x}{m} + \frac{\frac{a-x}{n} - p}{q} = x - 1$

$\frac{aq + xq + m \cdot \frac{a-x}{n} - mp}{mq} = x - 1$

$aq + xq + \frac{am - mx}{n} - mp = mqx - mq$ (IV.)

$naq + nqx + am - mx - nmp = nmqx - nmq$ (IV. u. VI. 4)

$nqx - mx - nmqx = -nmq - naq - am + nmp$ (XII.)

$x(nq - m - nmq) = nmp - nmq - naq - am$ (VIII.)

$x = \frac{nmp - nmq - naq - am}{nq - m - nmq}$ (III.)

3) $\frac{x + \frac{1}{5}}{x + \frac{7}{4}} = \frac{x}{1}$

$x + \frac{x}{5} = \frac{x}{7}(x + \frac{7}{4}) = \frac{x}{7} \cdot x + \frac{x}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{x}{7} + \frac{x}{4}$ (III.)

$x - \frac{x}{7} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{x}{20}$ (XII. und I.)

$\frac{6}{7}x = \frac{x}{20}$ (VIII.)

$x = \frac{x}{20} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7x}{120}$ (III.)

4) $\frac{3}{4x} + \frac{7}{\frac{1}{2}x} + \frac{9}{x} = 1$

$\frac{3}{4x} + \frac{14}{x} + \frac{9}{x} = 1$

$\frac{3 + 56 + 36}{4x} = 1$

$\frac{95}{4} = x$ (IV.)

5) $\frac{a}{x+m} + \frac{b}{nx+nm} = c$

$\frac{a}{x+m} + \frac{b}{n(x+m)} = c$

$\frac{an+b}{n(x+m)} = c$

$\frac{an+b}{n} = c(x+m) = cx + cm$ (XI.)

$\frac{an+b}{n} - cm = cx$ (I.)

$\frac{\frac{an+b}{n} - cm}{c} = x$ (III.)

$\frac{an+b-ncm}{nc} = x$

6) $\frac{4}{x-1} - \frac{5}{2x-2} - \frac{6}{3x-3} = \frac{3}{4}$

$\frac{4}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{6}{3(x-1)} = \frac{3}{4}$

$\frac{24-15-12}{6(x-1)} = \frac{3}{4}$

$-\frac{3}{6} = \frac{3}{4}(x-1)$ oder $-\frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x$ (II.)

$1 = 3x$ (IV.)

$\frac{1}{3} = x$ (III.)

7) $\frac{7,53x}{18} - \frac{2x}{5} + \frac{x}{6} = 3,86 - 100$

$\frac{7,53 \cdot 5 - 2 \cdot 18 + 15}{90}x = -96,14$ (VIII.)

oder $\frac{37,65 + 15 - 36}{90} x = - 96,14$

oder $\frac{16,65}{90} x = - 96,14$

also $x = \frac{- 96,14}{\frac{16,65}{90}}$ (III.)

oder $x = - \frac{96,14 . 90}{16,65} = - 519,675 \ldots$

8) $\frac{a + 3x}{4a} - \frac{7a - 5x}{6b} = \frac{x}{ab} + \frac{x}{2b}$

Durch Multiplication mit 12 ab wird dieß nach (A. 5)

$3b(a + 3x) - 2a(7a - 5x) = 12x + 6ax$

oder $3ab + 9bx - 14aa + 10ax = 12x + 6ax$

(XII) $3ab - 14aa = 12x + 6ax - 9bx - 10ax$

(VIII) $a(3b - 14a) = (12 + 6a - 9b - 10a)x$

$a(3b - 14a) = (12 - 4a - 9b)x$

$\frac{a(3b - 14a)}{12 - 4a - 9b} = x$, oder auch, da $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$

ñ. (155,6) $x = \frac{a(14a - 3b)}{9b + 4a - 12}$

9) $\frac{ax - b}{mx - n} = c$

$ax - b = mcx - nc$

$ax - mcx = b - nc$

$(a - mc)x = b - nc$

$x = \frac{b - nc}{a - mc}$

Anmerk. Man hätte hier auch setzen können:

$nc - b = mcx - ax$

$nc - b = (mc - a)x$

$\frac{nc - b}{mc - a} = x$

denn in den allgemeinen Zeichen läßt sich nicht erkennen, ob $nc > b$ oder $b > nc$. Es ist aber völlig gleichgültig, ob man die Ausdrücke mit der unbekannten Zahl auf der einen oder andern Seite zusammenfaßt, da doch am Ende nach (155, 6.)

$\frac{b - nc}{a - mc} = \frac{nc - b}{mc - a}$

§. 3.

Aufgaben, die durch Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten gelöst werden.

a) Aus dem Geschäftsleben.

270) Bei jeder Aufgabe ist das Wichtigste, die gegenseitige Abhängigkeit der Größen schnell zu überschauen. Sehr viele Größen hängen nämlich so von einander ab, daß wenn die eine vervielfacht wird, dieß auch bei der andern der Fall ist, oder wenn die eine getheilt wird, die andere sich vervielfacht, kurz, daß die Einheiten der einen mit denen der andern sich immer entweder zugleich vervielfachen, oder wenn sich die eine vervielfacht, dann in der andern eine Theilung bewirkt wird. Dahin gehören z. B. Waarenmengen und ihre Preise. Verdoppelt sich die Menge der Waare, so ist es, bei gleicher Güte der Waare, auch billig, daß sich der Preis verdopple.

So viel Einheiten eine Menge derselben Waare gegen eine andere hat, eben so viel Einheiten hat der Preis der ersten gegen den Preis der zweiten. Z. B. Wenn 3 ℔. 6 fl. kosten, so kosten 7 ℔. derselben Waare 14 fl. Je zwei Größen der einen Art bilden hier also mit den ihnen zugehörigen der zweiten Art gleiche Verhältnisse (192). Man sagt daher hier auch wohl, die Preise verhalten sich gerade, wie die Waaren.

Ist aber von 3 Arbeitern ein Werk in 12 Tagen gefertiget worden, so werden bei gleichem Fleiße 6 Arbeiter nicht doppelt, sondern nur halb so lang, also nur 6 Tage, daran zu arbeiten haben. In diesem Falle bilden zwar die beiden Mengen der Arbeiter 3 und 6 ein Verhältniß, welches dem Verhältniß der beiden Mengen der Tage 6:12 gleich ist; aber man muß dabei die Tage in umgekehrter Ordnung gegen die Arbeitermengen nehmen. Solche Größen, sagt man daher, stehen in umgekehrter Proportion oder bilden indirect gleiche Verhältnisse. Diese indirect gleichen Verhältnisse sind übrigens, wenn einmal die Proportion selbst richtig aufgefunden ist, durchaus nicht von der directen Proportion verschieden. Der Unterschied liegt nicht in der Ver-

hältnißgleichung, sondern nur in der Art, wie die Glieder in der Aufgabe von einander abhängen.

Beispiele:

1) Hat man die Aufgabe: $17\frac{1}{2}$ ℔. kosten $19\frac{3}{5}$ fl., wie viel Gulden kosten $9\frac{3}{5}$ ℔.? So enthält diese Aufgabe eine directe Proportion oder Verhältnißgleichung, in welcher ein Glied unbekannt ist, das man also entweder nach (203) oder, wie hier geschieht, finden kann.

$$17\tfrac{1}{2} \text{ ℔.} : 9\tfrac{3}{5} \text{ ℔.} = 19\tfrac{3}{5} \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

Nach (200) ist: $17\frac{1}{2} \cdot x = 9\frac{3}{5} \cdot 19\frac{3}{5}$

$$\text{also (267)} \quad x = \frac{9\frac{3}{5} \cdot 19\frac{3}{5}}{17\frac{1}{2}} = 10\tfrac{9}{12}\tfrac{4}{5} \text{ fl.}$$

Es ist übrigens oben (186. A.) gezeigt worden, daß sich solche Aufgaben ohne Proportionalansatz leicht lösen lassen.

2) Fragt man, wie viel Ellen Länge ein Stück Tuch haben muß, das $1\frac{3}{4}$ E. breit ist, wenn 2 Ellen breites gleichtheures (d. h. bei gleicher Güte gleichgroßes) $3\frac{1}{2}$ E. lang war; so stehen hier offenbar die Ellen der Länge in umgekehrtem Verhältniß zu den Ellen der Breite. Denn bei gleicher Fläche des Tuches verdoppelt sich die Breite, wenn das Tuch halb so lang ist. Man setzt also an:

Länge B Länge A Breite A Breite B

$$x : 3\tfrac{1}{2} = 1\tfrac{3}{4} : 2$$

Für die Auffindung der unbekannten Zahl selbst ist, wie oben beim directen Ansatz, nach (200)

$$x \cdot 2 = 3\tfrac{1}{2} \cdot 1\tfrac{3}{4}$$

$$x = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4}}{2} = \tfrac{4}{1}\tfrac{9}{6} = 3\tfrac{1}{1}\tfrac{}{6}$$

Während also in vorigem Ansatz die in der Aufgabe zusammengehörigen Glieder in den homologen Gliedern stehen, bilden sie hier die Mittel- und Außenglieder, und man kann die Regel aufstellen:

Stehen die Größen in geradem Verhältniß, so setze man die in der Aufgabe zusammengehörigen Glieder als homologe Glieder der Proportion an; bilden sie um-

gekehrt gleiche Verhältnisse, so setze man sie als Mittel- und Außenglieder an. Z. B.

1) Für 7 Pfund gibt man 9 fl., wie viel für $\frac{3}{4}$ Pfund?

lb.	lb.	fl.	fl.
7	: $\frac{3}{4}$	= 9	: x

2) Bei gleicher Scheitlänge soll eine Klafter Holz von $5\frac{1}{2}$ Fuß Länge und 6 Fuß Höhe eben so viel Holz enthalten, als eine andere von $5\frac{3}{8}$ Länge, wie hoch ist diese?

Länge A : Länge B = Höhe B : Höhe A
oder $5\frac{3}{8}$: $5\frac{1}{4}$ = 6 : x

Eine Sammlung von Beispielen findet man in jedem Rechenbuche unter der Ueberschrift Regeldetri.

271) Bei der Auflösung einer Regeldetriaufgabe können, im Fall man die Regel (200) nicht unmittelbar anwenden will, erst die Veränderungen benützt werden, welche man nach (195. 1 und 2) vornehmen darf. Z. B.

$17\frac{1}{2} : 9\frac{3}{5} = 19\frac{3}{5} : x$

$\frac{35}{2} : \frac{48}{5} = \frac{98}{5} : x$

$\frac{5}{2} : \frac{48}{5} = \frac{14}{5} : x$ (nach 195. 2)

$\frac{25}{10} : \frac{96}{10} = \frac{14}{5} : x$

$25 : 96 = \frac{14}{5} : x$ (nach 195. 1)

$125 : 96 = 14 : x$ (nach 195. 2)

$\frac{96 \cdot 14}{125} = x = 10\frac{94}{125}$ wie oben.

Meist drückt man diese Multiplication oder Division der Verhältniß- und der gleichförmigen Glieder durch dieselbe Zahl so aus, daß man sagt:

den Nenner des ersten Gliedes darf man weglassen, wenn man damit das 2te oder 3te multiplicirt; die Nenner des 2ten und 3ten, wenn man damit das erste Glied multiplicirt.

272) Meist hängt die Erzeugung einer Größe von der Zu- und Abnahme mehrerer anderer zugleich ab. So z. B. multiplicirt man den Taglohn eines Arbeiters mit der Zahl der Arbeiter und der Zahl der Tage, um den Gesammtlohn mehrerer Arbeiter in mehrern Tagen zu finden; oder der Lohn derselben ist ein Product aus einfachem Taglohn, multiplicirt mit der Anzahl der Tage und der Arbeiterzahl. Zwei verschiedene Löhne verhalten sich also, wie jene Producte aus ein-

fachem Taglohn, Zeit und Arbeiterzahl und sind die Gesammtlöhne gleich, so müssen auch diese Producte gleich sein.

Hier sagt man auch, die Löhne stehen zu einander im zusammengesetzten Verhältniß des einfachen Lohns, der Zeit und der Arbeiterzahl. Bei den meisten Größen, die im bürgerlichen Verkehr vorkommen, finden zusammengesetzte Verhältnisse statt. Die wichtigsten Fälle möchten folgende sein:

I. Arbeiterzahl, Zeit der Arbeit, Fleiß (der als Stundenzahl angegeben sein kann) bestimmen das Werk.

II. Arbeiterzahl, einfacher Taglohn, Zeit —— Gesammtlohn.

III. Tagsbedarf, Zeit, Anzahl der verzehrenden Dinge —— Gesamtbedarf.

IV. Länge des Weges, Gesammtlast, Lohn für 1 Einheit der Last in einer Wegeinheit —— Gesammtfuhrlohn.

V. Brodgewicht, Getraidpreis —— Brodpreis.

VI. Länge, Breite —— Fläche (freilich nur von bestimmter Gestalt des Rechtecks, wie sie meist vorkommt).

VII. Länge, Breite, Höhe oder Dicke —— Körper, (von der bestimmten Gestalt des rechtwinkeligen Parallelepipedums).

Z. B. Höhe, Länge des Holzhaufens und Scheitlänge —— Größe des Haufens.

VIII. Kapital, Zinsfuß, Zeit —— Zins.

IX. Zeit und Geschwindigkeit —— Weg.

Anmerk. Bei Berechnung der wirksamen Naturkräfte kommt man überall auf ähnliche Beziehungen der Größen untereinander. So ist z. B. die Masse (oder Menge der schweren Theile) eines Körpers bestimmt aus der Größe desselben und der Dichtigkeit; die Wassermasse, welche ein Fluß führt, seine Stärke oder sein Caliber bestimmt sich durch die Größe der senkrechten Durchschnittsfläche, multiplicirt mit der Geschwindigkeit ꝛc.

273) Beispiele über Arbeitberechnung.

Nennt man a Arbeiterzahl, z Zeit, f Fleiß oder einfache Arbeit, so ist

a) das Werk $w = a . z . f$

b) Zwei Werke verhalten sich, wie diese Producte aus Arbeiterzahl, Zeit und Fleiß.

$$W : w = AZF : azf$$

c) Sind zwei Werke gleich, so sind auch diese Producte gleich.

Ist $W = w$, so ist $AZF = azf$.

Da sich der Lohn wie das Werk verhält, so kann man auch statt Werk zu Werk setzen: Lohn zu Lohn verhält sich, wie das eine Product aus Arbeiterzahl, einfacher Arbeit und Zeit zum andern.

Beispiele zu a.

1) In 3 Tagen haben 7 Arbeiter 1400 c' Torf gestochen, wie viel einer in 1 Tag?

$$1400 = 3 . 7 . x \text{ also } \frac{1400}{3 . 7} = x$$

2) Was ist die Tagesarbeit eines Mannes, wenn 12 Arbeiter in 9 Tagen einen Graben von 3200 c' ausgraben?

$$3200 = 12 . 9 . x, \text{ also } x = 29\tfrac{1}{2}\tfrac{7}{7} c'$$

3) Wenn ein Arbeiter des Tags 32 c' gegraben hätte, wie lang hätten sie gebraucht? A. $8\frac{1}{3}$ T.

4) Wie lang hätten alsdann 5 Arbeiter gebraucht? A. 20 Tage.

5) Wie viel mußte im letzten Fall jeder täglich ausstechen, um in 12 Tagen fertig zu werden? A. $53\frac{1}{3}$ c'

Zu b.

1) 24 Arbeiter, die täglich 12 Stunden, wöchentlich 5 Tage arbeiten, verdienen in 19 Wochen 960 fl., wie viel verdienen 27 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden, wöchentlich 6 Tage 12 Wochen lang arbeiten, aber jeder stündlich $1\frac{1}{2}$ mehr zu Stande bringen, als einer der ersten?

Es ist: $A . Z . F : azf = P : p$

$$24 . (12 . 5 . 19) 12 : 27 (12 . 6 . 10) . 13 = 960 : x$$

Hieraus $24 . 12 . 5 . 19 . 12 . x = 27 . 12 . 6 . 10 . 13 . 960$

Also $x = 738\frac{18}{19}$

2) Hätten die letzten Arbeiter 800 fl. verdienen wollen bei wöchentlich 6 tägiger Arbeit, wie lang mußten sie täglich arbeiten?

$$24 . 12 . 5 . 19 . 12 : 27 . 12 . 6 . 13 . x = 960 : 800$$

Hieraus (200) $24 . 12 . 5 . 19 . 12 . 800 = 27 . 12 . 6 . 13 . 960 . x$

also $x = \frac{24.12.5.19.12.800}{27.12.6.13.960} = 10\frac{4}{5}$ beinahe.

Das Werk selbst kann durch einen zusammengesetzten Ausdruck gegeben sein; z. B. durch das Product aus Länge, Breite und Höhe, wenn es ein Körper ist.

3) Ein Graben von 1000′ Länge, $4\frac{1}{2}$′ mittler Breite und $3\frac{1}{5}$′ Tiefe, wird von 15 Arbeitern, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 24 Tagen ausgestochen; wie breit war ein anderer Graben, zu dem 20 Arbeiter, bei täglich 13 stündiger Arbeit 30 Tage brauchten und der 1200′ lang und $4\frac{1}{2}$′ tief war (gleicher Fleiß beider und gleiche Umstände bei der Arbeit vorausgesetzt). A. $4\frac{2}{3}$ beinahe.

Zu c.

1) Von 45 Arbeitern wird ein Werk in 9 Tagen vollendet, wie lang brauchen 50 dazu, wenn von jenen einer $\frac{1}{5}$ mehr arbeitet, als diese?

A. Z. F = a. z. f

$\frac{6}{5}.45.9 = 1.50.x$, also $x = 9\frac{18}{25}$ T.

2) Wenn der Meister A mit 2 Gesellen in 4 Tagen eine Anzahl Nägel liefert, bei 14stündiger täglicher Arbeit; wie lang muß B mit 3 Gesellen arbeiten, wenn er nur 10 Stunden täglich arbeitet, um eben so viel zu liefern? A. $4\frac{1}{5}$ Tage.

3) Hätte er aber in jeder Stunde $\frac{1}{8}$ mehr gefertigt, wie lang dann? A. $3\frac{1}{13}$.

274) Es wäre zu weitläufig, die übrigen Fälle durch eben so viele Beispiele zu erläutern, es kommen bei jedem die drei Hauptsätze vor, welche für die Arbeitsberechnung angeführt worden (273), und nach welchem Ansatz zu verfahren sei, wird man aus dem bisherigen entnehmen können. Es folgen also hier noch vermischte Aufgaben; über die Zinsrechnung sind die Aufgaben weiter unten zusammengestellt.

1) Zwei Boten gehen einen Weg, der erste stündlich $\frac{2}{5}$ Meilen, täglich 8 Stunden und braucht 10 Tage, wie lang braucht der andere, wenn er täglich 10 Stunden lang, aber stündlich nur $\frac{1}{4}$ Meile geht. Aus $\frac{2}{5}.8.10 = 10.\frac{1}{4}.x$ folgt. A. $9\frac{3}{5}$ Tage.

2) Wenn ein Bote, der täglich 9 Stunden, stündlich $\frac{3}{4}$ Meilen geht, in 12 Tagen 15 fl. verdient hat, wie viel gehört einem andern, der

in einer Stunde $\frac{3}{5}$ Meilen und täglich 7 Stunden geht, in 15 Tagen? A. $11\frac{2}{3}$ fl.

3) Wie lang hätte der letzte gehen müssen, um auch 15 fl. zu verdienen? A. $19\frac{1}{7}$ T.

4) Wenn ein Fuhrmann in 8 Tagen mit 4 Pferden, mit denen er täglich 8 Stunden lang fährt, stündlich $\frac{3}{8}$ Meilen macht, 8 Ctr. Last auf 1 Pferd gerechnet, 64 fl. verdiente, und ein anderer erhielt 80 fl., während er 7 Stunden täglich mit 5 Pferden fährt und stündlich $\frac{3}{10}$ Meilen zurücklegte nach 9 Tagen, wie viel mußte dieser auf 1 Pferd laden? A. $10\frac{8}{13}$ Ctr.

5) Wie viel Pferde hatte ein Fuhrmann, wenn er auf's Pferd 7 Ctr. ladet, täglich 7 Stunden lang und in jeder Stunde $\frac{2}{3}$ Meilen weit fährt, und in 20 Tagen 100 fl. verdient, wenn ein anderer in 12 Tagen bei täglich 8 Stunden und stündlichem Weg von $\frac{3}{8}$ Meilen $9\frac{1}{2}$ Ctr. auf's Pferd gerechnet mit 6 Pferden 150 fl. verdient? A. 7 Pferde (nahe).

6) Wie lange kann sich eine Festung halten, die bei 1000 Mann auf 2 Monate Proviant hat, und täglich $\frac{6}{7}$ Pfund dem Mann austheilt, wenn 400 Mann dazu kommen und täglich nur $\frac{3}{4}$ Pfund gegeben wird?

Ansatz: $1000 \,.\, \frac{6}{7} \,.\, 2 = 1400 \,.\, \frac{3}{4} \,.\, x$

7) Wenn m Pfd. Brod beim Kornpreis p a Kreuzer kosten, wie viel Pfd. erhält man beim Kornpreis q für b Kreuzer?

Es ist $a : b = m \,.\, p : x \,.\, q$

$$x = \frac{b\,m\,p}{a\,q}$$

8) Wie viel erhält man für gleiches Geld?

$$mp = x \,.\, q$$

$$x = \frac{mp}{q}$$

a. 410,000 M. 9) Wenn in einer Festung 70000 Pfund Brod liegen, die auf 12 Monate reichen, wenn täglich $1\frac{1}{4}$ Pfd. auf den Mann kommt; darauf noch 350 Mann einrücken und sodann jedem $\frac{5}{6}$ Pfd. gegeben wird und man langt 13 Monate aus, wie viel Mann lagen Anfangs in der Festung? A. 910.

10) Einem Meister kommt die Verköstigung von 7 Arbeitern in 14 Tagen auf 50 fl.; wenn er nun $\frac{1}{6}$ der bisherigen Kost abbricht, wie lang hält er 6 Arbeiter für 40 fl. A. $15\frac{7}{12}$ T.

11) Wenn 1 Scheffel Korn 8 fl. kostet, so wiegt der 6 kr. Laib 2 Pfund 3 Loth, wie viel wiegt er bei 12 fl. Kornpreis? A. $44\frac{4}{9}$ Loth.

12) Ein Fabrikant hat 120 Arbeiter; jedem gibt er täglich $\frac{3}{4}$ Pfund Brod, als das Korn ihm jährlich 5000 fl. kostet; wie viel Brod darf er geben, wenn er bei $\frac{1}{3}$ höherem Kornpreis 100 Arbeiter mit 5500 fl. 11 Monate lang mit Brod erhalten will?

$\frac{3}{4} . 120 . 12 . 1 : x . 100 . 11 . \frac{4}{3} = 5000 : 5500$

$x = 25\frac{13}{25}$ Loth.

13) Auf einem Landgut werden die Arbeiter mit Getraid bezahlt, oder sie können bei $6\frac{1}{2}$ fl. Preis eines Scheffels Korn jeder täglich den Werth von 10 Pfd. Brod fordern, wenn sie 12 Stunden arbeiten. Nachdem das Getraid gestiegen war, erklärte der Gutsbesitzer, er könne täglich nur mehr 8 Pfd. Brod abgeben und dann müßten sie täglich 14 Stunden arbeiten; was war der Kornpreis? A. $9\frac{3}{4}$ fl.

14) Wenn 1 Maß Holz im Orte B eben so viel Holz enthalten soll, als in A und es ist in A $5\frac{1}{2}'$ hoch, $5\frac{1}{2}'$ lang, die Scheitlänge ist $3\frac{1}{2}'$, wie lang dürfen die Scheite in B werden, wenn das Maß dort 6′ lang und 6′ hoch ist? A. $2\frac{171}{288}$ Fuß.

15) Ein Holzstoß ist 140′ lang, 12′ hoch von 3 schuhigen Scheiten und kostet 336 fl.; ein anderer wird um 500 fl. gekauft, worin die Scheite $3\frac{1}{2}'$ lang sind, dessen Höhe aber nur $10\frac{1}{2}'$ ist: wie lang muß er sein? A. $204\frac{4}{49}'$.

---

275) Zur Lösung mancher Aufgaben ist eine Verbindung von Verhältnißgleichungen (201) erforderlich. Fragt man z. B. wie viel Laubthaler machen 700 fl., im 20 fl. Fuß, wenn 11 fl. rhein. = 4 Lbthlr., 5 fl. im 20 fl. Fuß = 6 fl. rhein. sind? So hat man:

weil 700 fl. Ct. = x Lbthl. (n. 200 Z. 2) 1 fl. Ct. : 1 Lbthl. = x : 700

4 Lbthl. = 11 fl. rhn. 1 Lbthl. : 1 fl. rhn. = 11 : 4

6 fl. rhn. = 5 fl. Ct. 1 fl. rhn. : 1 fl. Ct. = 5 : 6

folgl. u. (201) 1 fl. Ct. 1 Lbthl. 1 fl. rhn. : 1 Lbthl. 1 fl. rhn. 1 fl. Ct. = x. 11. 5 : 700. 4. 6

Daher (198. Z.) 1 : 1 = x. 11. 5 : 700. 4. 6

Daher nach (194. Z.) $x . 11 . 5 = 700 . 4 . 6$

$$x = \frac{700 . 4 . 6}{11 . 5}$$

2) Für 100 holländ. Gulden in Amsterdam zahlbar, gibt man in Brüssel $100\frac{1}{4}$ dergl. Wenn nun für 146 Thlr. Ct. in Leipzig 300 Mark Banko in Hamburg, für 2 solche Mark aber $35\frac{1}{2}$ Stüber in Brüssel gegeben werden, und 20 Stüber = 1 fl. Holländ. sind: wie viel Thlr. sächsisch

hat man auszugeben, wenn man in Brüssel 7890 fl. Holländ. zu zahlen hat und man nicht unmittelbar Geld dahin senden, sondern zunächst eine Forderung in Amsterdam sich verschaffen, mit dieser Hamburger Geld kaufen und erst von dort aus die Zahlung in Brüssel machen will, was man über Amsterdam und Hamburg zahlen heißt?

Weil x Thlr. sächs. = 7890 fl. Holl. in Brüssel
104¼ fl. Holl. in Brüssel = 100 fl. Holl. in Amsterdam
1 fl. = 20 Stbr.
35½ Stbr. = 2 Mk. B. Hamb.
300 Mk. B. H. = 146 Thlr. Ct.

(oder nach 200, Z. 1)

fl. Holl. in Brüssel	: Thlr. sächs.	=	x	: 7890
fl. Holl. in Amstd.	: fl. Holl. in Brüssel	=	104¼	: 100
Stüber	: fl. Amsterd.	=	1	: 20
Mk. B. H.	: Stüber	=	35½	: 2
Thlr. sächs.	: Mk. B.	=	300	: 146

so ist nach (201 u. 195) 1 : 1 = x . 104¼ . 1 . 35½ . 300 : 7890 . 100 . 20 . 2 . 146

oder (194 Z.) x . 104¼ . 1 . 35½ . 300 = 7890 . 100 . 20 . 2 . 146

Betrachtet man die Gleichungen, aus welchen diese Proportionen abgeleitet sind, so bemerkt man, daß in ihren beiden Seiten nach der Reihe alle die Zahlen herabstehen, welche in den gleichen Producten aus den Proportionen abgeleitet sind. Es ist daher gar nicht nöthig, die Proportionen selbst zu verbinden, sondern man stellt nur die Gleichungen so untereinander, daß jede Größenbenennung auf beiden Seiten vorkommt. Dieß bewirkt man leicht dadurch, daß man mit der Gleichung anfängt, welche das unbekannte Gliede nthält, und dann immer diejenige folgen läßt, welche links dieselbe Einheit hat, wie die vorhergehende rechts, wo dann die letzte rechts die Einheit der unbekannten Zahl enthält, wie es in beiden Beispielen geschehen ist.

Die Producte dieser untereinandergesetzten Zahlen sind beiderseits gleich, das eine enthält die unbekannte Zahl als

Factor: diese ist also das andere dividirt durch die übrigen Factoren der erstern. Vor der Multiplication kann man beide gleiche Producte mit derselben Zahl multipliciren und dividiren, wodurch man die Nenner der Brüche und die gemeinschaftlichen Factoren wegschafft.

Beispiel.

Will man von Nürnberg aus 3500 Mk. Bo. in Hamburg zahlen und kauft man zu dem Ende eine Leipziger Forderung zu $99\frac{3}{4}$, d. h. so daß man für eine Anweisung auf 100 Thlr. Ct. in Leipzig baar $99\frac{3}{4}$ Thlr. in Nürnberg gibt; verkauft die Leipziger Forderung in Leipzig, kauft dafür einen Hamburger Wechsel zu $148\frac{3}{4}$ Thlr. Ct. für 300 Mk. Bo., wie viel fl. rhein. muß man ausgeben, um jene 3500 Mk. zu berichtigen, wenn 5 Thlr. Ct. = 9 fl. rhein. sind?

x fl. rhein.	=	Mk. Bo.	3500
300 Mk. B.	=	Thlr. Ct. in Leipz.	$148\frac{3}{4}$
100 Thlr. L.	=	Thlr. Nürnb.	$99\frac{3}{4}$
5 Thlr.	=	fl. rhein.	9

$$x \,.\, 300 \,.\, 100 \,.\, 5 = 3500 \,.\, 148\tfrac{3}{4} \,.\, 99\tfrac{3}{4} \,.\, 9$$

$$\text{also } x = \frac{997101}{320} = 3115 \text{ fl. } 56\tfrac{1}{2} \text{ kr. ca.}$$

Diese Art dergleichen Aufgaben anzusetzen und zu berechnen, heißt die Kettenrechnung, oder auch, von ihrem Erfinder, die Reesische Regel.

Anmerk. Man könnte diese Aufgaben auch durch mehrmalige Anwendung der einfachen Proportion so lösen:

1) Wie viel Thaler betragen 3500 Mk. Hamb. Bo., wenn 300 Mk. $148\frac{3}{4}$ Thlr. sind. Oder:

$$300 : 3500 = 148\tfrac{3}{4} : x$$

$$\text{Daher } x = \frac{3500 \,.\, 148\frac{3}{4}}{300} \text{ Thlr. Leipz.}$$

2) Wie viel Thlr. in Nürnberg betragen x Thlr. in Leipzig, wenn 100 Thlr. in Leipzig $99\frac{3}{4}$ Nürnberger machen? Oder:

$$100 : \frac{3500 \,.\, 148\frac{3}{4}}{300} = 99\tfrac{3}{4} : y$$

$$y = \frac{3500 \,.\, 148\frac{3}{4} \,.\, 99\frac{3}{4}}{100 \,.\, 300} \text{ Thlr. in Nürnberg.}$$

3) Wie viel fl. rhein. betragen y Thlr., wenn 5 Thlr. 9 fl. rhein.?

Oder $5 : \frac{3500 \cdot 148\frac{3}{4} \cdot 99\frac{3}{4}}{100 \cdot 300} = 9 : z$

$$z = \frac{3500 \cdot 148\frac{3}{4} \cdot 99\frac{3}{4} \cdot 9}{5 \cdot 100 \cdot 300}$$

welcher Quotient dieselben Factoren enthält, wie oben der Kettenansatz.

276) Da diese Anordnung der Glieder die Berechnung erleichtert, so hat man auch für andere auf Proportionen oder Productgleichungen (200. Z. 2) sich gründende Berechnungen, folgende Regel ausgedacht, wonach sie in einen ähnlichen Ansatz gebracht werden können.

1) Ordne die in der Aufgabe vorkommenden Verhältnisse so, daß die gleichbenannten Glieder unter einander zu stehen kommen.

2) Setze das Verhältniß an, worin das gesuchte Glied vorkommt, wie die erste Gleichung im Kettensatz.

3) Betrachte das Verhältniß, ob es, wenn alle übrigen Verhältnisse als Verhältnisse der Gleichheit angenommen werden, gegen das Fragverhältniß ein gerades oder indirectes ist.

4) Ist es ein gerades, so setze seine Glieder in umgekehrter Ordnung, ist es ein indirectes, gerade so unter das Fragverhältniß, wie sie in der vorläufigen Anordnung beisammen stehen, d. h. die in der Aufgabe zusammengehörigen Glieder werden im ersten Falle verwechselt, im andern auch im Ansatz untereinander gestellt.

Beispiele:

1) Wie viel kosten $37\frac{1}{2}$ Pfd., wenn $3\frac{1}{5}$ Pfd. $7\frac{1}{2}$ fl. kosten?

Anordnung: x fl. kosten $37\frac{1}{2}$ ℔.
$7\frac{1}{2}$ fl. — $3\frac{1}{5}$ ℔.

Ansatz:

x fl.	fl. $7\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{5}$ ℔.	℔. $37\frac{1}{2}$

Die Pfunde verhalten sich gerade, wie die Preise, also wird das Verhältniß der Pfunde umgekehrt unter das der Preise gesetzt. So stehen jetzt dieselben Factoren in beiden Producten, welche durch die Proportion in sie kämen:

℔. ℔. fl. fl.
$37\frac{1}{2} : 3\frac{1}{5} : = x : 7\frac{1}{2}$

2) Wie lang muß ein 2 Ellen breites Stück Tuch sein, wenn es eben so viel Fläche haben soll, wie ein $3\frac{1}{2}$ E. langes und $1\frac{3}{4}$ E. breites?

x E. Länge, 2 E. Breite
$3\frac{1}{2}$ E. — $1\frac{3}{4}$ E. —

x	$3\frac{1}{2}$
2	$1\frac{3}{4}$

Da sich bei gleicher Fläche die Länge umgekehrt wie die Breite verhält, so ist das Verhältniß der Breiten gerade so unter das der Längen zu setzen, wie sie in der Anordnung stehen, und man erhält so dieselben Factoren in die gleichen Producte, wie aus

Br. Br. Lg. Lg.
$2 : 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2} : x$

3) Beispiel (S. zu b, 1, in 273).

Anordnung.

24 Arbeiter in 12 Std. wöchentl. 5 T. in 19 Woch. verdien. b. 12 Stck. Arbeit 960 fl.
27 — — 10 — — 6 — 12 — — b. 13 Stück — x fl.

x	960
1) 24	27
2) 12	10
3) 5	6
4) 19	12
5) 12	13

1) Wenn doppelt so viel Arbeiter in gleicher Zeit bei tägl. und wöchentlich gleicher Anstrengung beschäftigt werden, so verdienen sie doppelten Lohn: es ist also das Verhältniß der Arbeiterzahl gegen das Verhältniß des Lohnes gerade, somit umgekehrt unter das Fragverhältniß zu schreiben, d. h. da in der Anordnung der Glieder 24 in der Reihe bei 960, 27 bei x steht, so setzt man 24 unter x, 27 unter 960.

2) Wenn gleichviel Arbeiter in gleichviel Tagen und Wochen täglich doppelt so lang arbeiten, so verdienen sie das Doppelte: es verhält sich also die tägliche Stundenzahl gerade, wie der Lohn, somit ist der Ansatz umgekehrt.

3) Gleichviel Arbeiter, welche täglich gleichlang arbeiten und gleichviel Wochen beschäftigt sind, verdienen das Doppelte, wenn sie wöchentlich doppelt so lang arbeiten: das Verhältniß der wöchentlichen Tage ist also gerade, wie das des Lohns; somit der Ansatz umgekehrt.

4) Gleichviel Arbeiter, welche gleichviel Arbeitsstunden und Arbeitstage halten, arbeiten doppelt so viel Wochen, als andere: so verdienen sie das Doppelte. Es ist also das Verhältniß der Wochenzahl gegen den Lohn gerade, somit der Ansatz umgekehrt zu machen.

5) Wenn gleichviel Arbeiter in gleicher Zeit das Doppelte zu Stande bringen, so verdienen sie doppelt so viel: es ist also das Verhältniß der Arbeitsmengen gleich dem Verhältniß des Lohns, somit umgekehrt anzusetzen.

Vergleicht man nun diesen Ansatz mit der oben gegebenen Berechnung, so finden sich hier alle die Factoren in den gleichen Producten, welche man oben aus der Proportion in dieselben erhielt; es kann also die Berechnung wie beim Kettensatz gemacht werden.

4) Beispiel (c. 1. in 273.)

Anordnung:

45 Arbeiter vollenden beim $\frac{6}{5}$ fachen Fleiß ein Werk in 9 Tagen
50 — — — — 1 — — dasselbe — x —

Ansatz:	x	9
	1) 50	45
	2) 1	$\frac{6}{5}$

1) Doppelt so viel Arbeiter brauchen bei gleichem Fleiß halb so lang: das Verhältniß der Arbeiterzahl ist also umgekehrt dem Verhältniß der Arbeitstage gleich, somit der Ansatz gerade.

2) Gleichviel Arbeiter brauchen bei doppeltem Fleiße halb so lang; somit verhält sich der Fleiß umgekehrt, wie die Arbeitszeit, somit der Ansatz gerade.

Hieraus erhält man, wie oben, $9\frac{18}{25}$ Tage.

Anmerkung. Man sieht leicht ein, daß man durch diese Regel, welche die Basedowische heißt, der Beurtheilung der Aufgabe kei-

neswegs überhoben ist, ja daß diese weit schwieriger ist, als für den Proportionsansatz. Und selbst wenn der Ansatz gemacht ist, so ist die Rechnung nicht mehr erleichtert, als durch die Proportion, welche also dem Schüler weit mehr zu empfehlen ist.

277) Zinsrechnung.

Zins ist die Abgabe, die man für die Benützung einer Geldsumme (Kapital) in bestimmter Zeit dem Eigenthümer des Kapitals entrichtet. Nennt man das, was von 100 fl. in einem Jahr gegeben wird, p, so ist $\frac{p}{100}$ der Theil des Kapitals, der alljährlich als Zins gezahlt wird; der Betrag des Zinses in 1 Jahr ist also, wenn a das Kapital ist $a.\frac{p}{100}$. Dieser Betrag wiederholt sich in jedem Jahre; muß also, wenn das Kapital n Jahre hindurch benützt wird, $a.\frac{p}{100}.n$ betragen. Ist also b der Zins, den man in n Jahren aus a Kapital zu p vom Hundert (oder p Procent) bezieht, so ist

$$b = a.\frac{p}{100}.n$$

Die Zahl $\frac{p}{100}$, womit man das Kapital multiplicirt, um den Jahreszins zu erhalten, nennt man auch den Zinsfuß (so viel als Zinsverhältniß). Man kann also kurz sagen: der Zins ist ein Product aus Kapital, Zeit und Zinsfuß.

Anmerk. 1. In diesem Product von Kapital, Zeit und Zinsfuß sind Zeit und Zinsfuß als reine Zahlen zu betrachten, nur die Einheit des Kapitals bestimmt die eigentliche Einheit des Zinses.

Anmerk. 2. Dabei wird hier zunächst vorausgesetzt, daß der Zins, auch wenn er nicht alljährlich entrichtet wird, nicht selbst wieder Zins trage, was man den einfachen Zins nennt. Trägt der Zins selbst wieder Zins, d. h. wird der Zins alljährlich zum Kapital geschlagen, so ist eine besondere Betrachtung erforderlich, die unten folgt.

Ist nun in I) $b = a.\frac{p}{100}.n$, eine der vier Zahlen unbekannt, so läßt sie sich finden, wenn die drei andern gegeben sind. Demnach ist:

$$a = \frac{100\,b}{pn},\quad p = \frac{100\,b}{an},\quad n = \frac{100\,b}{ap}$$

Zwei Zinse verhalten sich wie die Producte aus Kapital, Zeit und Zinsfuß.

II. $b' : b = a' \cdot \frac{p'}{100} \cdot n' : \frac{a \cdot p \cdot n}{100} = a'p'n' : apn$ (nach 195.)

a) Ist hier $a' = a$, so ist (195) $b' : b = \frac{p'}{100} n' : \frac{p \cdot n}{100} = p'n' : pn$
d. h. sind die Kapitale gleich, so verhalten sich die Zinse, wie die Producte aus Zeit und Zinsfuß.

b) Ist $p' = p$, so ist (195)
$b' : b = a'n' : an$
d. h. bei gleichem Zinsfuß verhalten sich die Zinsen, wie die Producte aus Kapital und Zeit.

c) Ist $n' = n$, so ist (195)
$b' : b = a'p' : ap$
d. h. bei gleicher Zeit verhalten sich die Zinsen, wie die Producte aus Kapital und Zinsfuß.

d) Ist $a' = a$ und $p' = p$, oder doch $a'p' = ap$, so ist (195)
$b' : b = n' : n$
d. h. bei gleichem Kapital und Zinsfuß verhalten sich die Zinsen, wie die Zeiten.

e) Ist $a' = a$ und $n' = n$, oder doch $a'n' = an$, so ist (195)
$b' : b = p' : p$
d. h. bei gleichem Kapital und gleicher Zeit verhalten sich die Zinsen, wie die Zinsfuße.

f) Ist $p' = p$ und $n' = n$, so ist
$b' : b = a' : a$
d. h. bei gleichem Zinsfuß und gleicher Zeit verhalten sich die Zinsen, wie die Kapitalien.

Sind endlich zwei Zinsen gleich, so sind die Producte aus Kapital, Zeit und Zinsfuß gleich. Man hat also, wenn $b = b'$

III. $\frac{a \cdot p \cdot n}{100} = a' \cdot \frac{p'}{100} \cdot n'$ oder

$$apn = a'p'n'$$

Hieraus läßt sich, wenn die 5 übrigen Stücke gegeben sind, a, p, n, finden.

Beispiele:

1) Wenn in einem Jahr 10 pct. Zins gezahlt wird, was tragen 750 fl. in $4\frac{1}{3}$ Jahren? Aus $x = \frac{10}{100} . 4\frac{1}{3} . 750$ folgt $x = 325$ fl.

2) Was geben 1250 fl. in 11 Monaten zu $4\frac{1}{5}$ pct.? A. $48\frac{1}{8}$ fl.

3) Was geben 2000 fl. in $\frac{1}{2}$ Monat zu $7\frac{1}{8}$ pct.? A. $5\frac{15}{16}$ fl.

4) Wenn man aus einem Kapital zu 5 pct. auf $1\frac{1}{4}$ Jahr 231 fl. Zins erhält, wie groß ist das Kapital? A. $x . 1\frac{1}{4} . \frac{5}{100} = 231$ folgt $x = 3696$ fl.

5) Was ist der Zinsfuß, wenn man aus 500 fl. in 3 Jahren 90 fl. Zins bezog? A. 6 pct.

6) Wenn 75 fl. Zins aus einem Kapital in 30 Jahren zu $\frac{3}{4}$ pct. angewachsen ist und dasselbe Kapital in 21 Jahren 80 fl. Zins trug, wie hoch war hier der Zinsfuß? A. $1\frac{1}{7}$ pct.

7) Aus einem Kapital hat man in 3 Jahren zu 7 pct. 91 fl. Zins erhalten, wie hoch muß man es ausleihen, um in 5 J. 100 fl. einzunehmen? Aus $91 : 100 = 3 . 7 : 5 . x$ folgt $x = 4\frac{8}{13}$ pct.

8) Wenn ein Kapital in 9 Jahren zu $3\frac{1}{6}$ pct. 25 fl. Zins gab, wie viel gibt es in 1 Jahr zu 5 pct.? A. 4 fl. $23\frac{3}{19}$ kr.

9) Wenn $327\frac{1}{2}$ fl. zu $3\frac{1}{4}$ pct. in derselben Zeit 40 fl. Zins trugen, in welcher 500 fl. zu 5 pct. aussteht, wie viel Zins bringt dieses? A. 93 fl. 57 kr. ca.

10) Wenn der Zins aus 181 fl. in einer gewissen Zeit 41 fl. war zu $5\frac{1}{2}$ pct., wie hoch ist der Zinsfuß bei 900 fl., wenn sie in gleicher Zeit 250 fl. trugen? A. $6\frac{11}{13}$ beinahe.

11) Wenn 50 fl. in derselben Zeit 9 fl. geben, wo 300 fl. zu 5 pct. 25 fl. Zins tragen, wie hoch waren sie ausgeliehen? A. zu $10\frac{1}{5}$ pct.

12) Wenn ein Kapital zu 8 pct. in derselben Zeit 200 fl. Zins tragen soll, in welcher 2790 fl. zu $5\frac{4}{5}$ pct. 350 fl. gaben, wie groß war jenes? A. $1155\frac{6}{7}$ fl.

13) Wenn man 70 fl. Zins erhielt aus 3000 fl. in 5 Monaten, wie viel erhält man zu gleichem Zinsfuß aus 1250 fl. in 7 Monaten? A. $40\frac{5}{6}$ fl.

14) Wenn 270 fl. zu demselben Zinsfuß ausgeliehen sind, wie 900 fl. und erstere geben in 11 Monaten 12 fl. Zins, wie lang müssen diese stehen, um 30 fl. zu geben? A. $8\frac{1}{4}$ Monat.

15) Wenn in 4 Jahren 7 Monaten und 12 Tagen 300 fl. gerade 70 fl. Zins brachten, wie viel Kapital muß man zu gleichem Zinsfuß

ausleihen, wenn man in 3 Jahren 5 Monaten 75 fl. erhalten will? A. 434 fl. 19 kr. (nahe).

16) Wenn ein Kapital zu $5\frac{1}{2}$ pct. 90 fl. Zins brachte, wie hoch mußte es ausgeliehen werden, wenn es in derselben Zeit 85 fl. geben soll? A. $5\frac{7}{33}$ pct.

17) Wenn ein Kap. zu $4\frac{1}{2}$ pct. 32 fl. 30 kr. Zins bringt, wie viel erhielte man zu $7\frac{1}{4}$ pct.? A. $52\frac{13}{36}$ fl.

18) Wenn von demselben Kapital in 5 Monaten 98 fl. Zins eingenommen wird, wie viel in 11 Mon. bei gleichem Zinsfuß? A. $215\frac{3}{5}$ fl.

19) Wenn ein Kapital in $3\frac{1}{4}$ Jahr $83\frac{1}{2}$ fl. Zins gibt, wie lang steht es, um zu gleichem Zinsfuß 100 fl. einzubringen? A. 3 J. 10 M. 21 T. (nahe).

20) Wenn 100 fl. in einer gewissen Zeit 15 fl. geben, was geben in derselben Zeit zu gleichem Zinsfuß $78\frac{1}{2}$ fl.? A. $11\frac{31}{40}$ fl.

21) 1150 fl. geben 98 fl. Zins, wie viel Kapital trägt in derselben Zeit zu gleichem Zinsfuß 55 fl.? A. $645\frac{7}{8}$ fl.

22) Wenn man aus einem Kapital, das zu 3 pct. $7\frac{1}{2}$ Jahre lang ausstand, eben so viel Zins erhielt, wie aus 300 fl. in 4 Jahren zu 6 pct., wie groß war jenes Kapital? Aus $x \,.\, 3 \,.\, 7\frac{1}{2} = 300 \,.\, 4 \,.\, 6$ folgt $x = 320$ fl.

23) Jemand hat auf 3 Jahre 700 fl. ohne Zins erhalten; er leiht ein anderes Mal 1800 fl. auch ohne Zins, wie lange muß er es stehen lassen, daß sich der Dienst ausgleiche? A. 14 Monate.

24) Wenn 1000 fl. zu $3\frac{1}{2}$ pct. eben so viel Zins geben sollen, als 900 fl. in 5 J. zu 7 pct., wie lange müssen sie ausstehen? A. 9 J.

25) In welcher Zeit geben 1000 fl. zu $4\frac{1}{3}$ pct. eben so viel Zins, als in 5 J. zu $6\frac{1}{3}$ pct.? A. $7\frac{4}{19}$ J.

26) Zu wie viel vom Hundert muß ein Kapital von 1970 fl. ausstehen, wenn es in 13 J. eben so viel Zins bringen soll, als 2100 fl. zu $4\frac{1}{2}$ pct. in 12 Jahren? A. $4\frac{2}{5}$ pct. (nahe).

27) Der Zins aus 5000 fl. Kapital zu $3\frac{1}{4}$ pct. auf 9 J. wurde unter 60 Arme gleich vertheilt; wenn nun jeder bei der nächsten Vertheilung $\frac{1}{3}$ mehr erhalten soll und es dann 100 Arme sind, zu welchem Zinsfuß muß das Kapital ausgeliehen werden, wenn die Vertheilung nach 10 J. geschehen wird und das Kapital um 200 fl. vermehrt worden ist. Aus $5000 \,.\, 3\frac{1}{4} \,.\, 9 : 5200 \,.\, 10 \,.\, x = 60 \,.\, 1 : 100 \,.\, \frac{4}{3}$ folgt $x = 6\frac{1}{4}$ pct.

28) Aus 3000 fl. wurde von 3 zu 3 J. der dreijährige Zins zu $4\frac{1}{3}$ pct. 50 Armen in Brod gegeben. Wenn nun von 75 Armen das nächste Mal jeder doppelt so viel erhalten soll, der Kornpreis um $\frac{1}{3}$ gefallen ist, das Kapital 500 fl. größer war, überdieß der Zinsfuß auf $4\frac{1}{2}$ pct. erhöht wurde, wann kann die Austheilung vor sich gehen? Nach 4 J. 11 Mon. 13 Tagen (nahe).

29) Als der Kornpreis $8\frac{1}{2}$ fl. war, konnten 75 Arme jeder 3 Brode aus den Zinsen eines Kapitals von 1100 fl. alle $1\frac{1}{2}$ J. erhalten, während das Kapital zu 6 pct. ausstand. Da es aber nur mehr zu $5\frac{1}{2}$ pct. ausgebracht werden kann und 100 Arme zu befriedigen sind, wie groß müßte das Kapital sein, wenn man die Austheilung alle 2 Jahre vornehmen will, da der Kornpreis 9 fl. 45 kr. ist und jeder 4 Brode bekommen soll? A. $1835\frac{5}{17}$ fl.

278) Aufgaben über Rabatt und Terminzahlungen.

30) Wenn a fl. nach n Jahren zu zahlen sind, wie viel betragen sie baar, wenn man p Procent Rabatt rechnet?

Erläuterung. Das, was man baar gibt, nebst dem Zins daraus auf die Zeit, um welche es zu früh gegeben wird, muß der Endsumme gleich sein. Diesen Zins, den man aus dem Baaren berechnet, heißt man auch den strengen Rabatt. Beim gewöhnlichen Rabatt zieht man blos den Zins der Endsumme auf die Zeit, um welche zu bald gezahlt wird, von dieser Summe ab, um das Anfangs zu zahlende Kapital zu erhalten. Es ist also nach strengem Rabatt:

$$x + x \cdot \frac{p}{100} \cdot n = a$$

$$\text{also } x = \frac{100a}{100 + pn}$$

Nach gemeinem einfachen Rabatt wäre der Rabatt

$a \cdot \frac{p}{100} \cdot n$, folglich die baare Zahlung

$a - a \cdot \frac{p}{100} \cdot n = a\left(1 - \frac{pn}{100}\right)$. Der Unterschied ist also

$$\frac{100a}{100 + pn} - a\left(1 - \frac{pn}{100}\right) = \frac{p^2n^2 \cdot a}{100\,(100 + pn)}$$

31) Wenn 1000 fl. nach 3 Jahren zu zahlen sind, oder baar mit 5 pct. Rabatt, wie viel betragen sie baar? A. $869\frac{1}{13}$ fl. Nach gemeinem Rabatt 850 fl.

32) Wenn 2000 fl. nach 9 Monaten zahlbar schon in 7 Monaten verlangt werden, wie viel beträgt der 6procentige Rabatt? A. $19\frac{8}{101}$ fl. Der gemeine Rabatt: 20 fl.

33) Es sollen a fl. in n Jahren, b fl. in m Jahren, c fl. in q Jahren bezahlt werden, wann ist es billig, daß die ganze Summe auf einmal gezahlt werde, den Zinsfuß bei allen zu p Procent gerechnet?

Erläuterung. Die Zinsen, welche sich der Zahler aus den Theilsummen noch verschaffen kann, müssen gleich sein dem Zins aus der Gesammtsumme in der gesuchten Zeit, da es billig ist, daß er bei beiden Arten der Zahlung noch gleichen Nutzen genieße. Also ist:

$$a \cdot n \cdot \frac{p}{100} + b \cdot m \cdot \frac{p}{100} + c \cdot q \cdot \frac{p}{100} = (a + b + c)\,x \cdot \frac{p}{100}$$

oder $an + bm + cq = (a + b + c)\,x$

Man sieht hieraus, daß es auf den Zinsfuß, wenn er in allen Theilsummen derselbe ist, wie in der Hauptsumme, gar nicht ankommt.

34) Wenn 1180 fl. in 5 Monaten, 1200 fl. in 13, 1900 fl. nach 15 Monaten zu zahlen sind, wann kann man die ganze Summe mit Billigkeit auf einmal fordern? A. nach 11 Mon. 13 Tagen (nahe).

Ansatz: $1180 \cdot 5 + 1200 \cdot 13 + 1900 \cdot 15 = 4280 \cdot x$

35) Wenn 1600 fl. nach 3 Monaten, 1500 fl. nach 2 Monaten und eine gewisse Summe nach $1\frac{1}{2}$ Jahren, oder die Gesammtsumme nach 10 Monaten zu zahlen ist, wie viel beträgt der unbekannte Theil der Hauptsumme? A. 2900 fl.

36) Wenn 1000 fl., die man baar schuldet, in 3 gleichen Termingeldern nach 1, $1\frac{1}{2}$ und 2 Jahren gezahlt werden sollen, wie viel beträgt jedes Termingeld, wenn 5 pct. Zins berechnet werden?

Erläuterung. Der Empfänger muß auf beide Arten der Zahlung am Ende des 2ten Jahres sammt Zins gleichviel besitzen. Also hat man:

$$1000 + 1000 \cdot \tfrac{1}{20} \cdot 2 = x + x \cdot \tfrac{1}{20} + x + x \cdot \tfrac{1}{40} + x$$

Also $x = 357$ fl. $43\frac{1}{2}$ kr. (nahe).

37) Wenn aber 1000 fl., die nach 6 Jahren zu zahlen sind, in zwei gleichen Termingeldern bei 5 pct. Zinsen in 1 und 3 Jahren abgetragen werden sollen, wie viel beträgt jedes von diesen? A. 416 fl. 40 kr.

Erläuterung. Hier ist der Termin, auf welchen der Empfänger Gleiches erhalten muß, das Ende des 6ten Jahres.

38) Es soll Jemand 4500 fl. nach Verlauf eines Jahres zahlen; er erbietet sich aber 2000 fl. baar und den Rest in 3 Termingeldern von 500 fl. in 3 gleichen Terminen zu zahlen, wie lang ist ein Termin?

Erläuterung. Der Geber muß sich aus seinen 1500 fl. noch eben so viel Zins verschaffen können, als er bei der zuerst festgesetzten Zahlung aus 4500 fl. bezogen hätte. Man hat also:

$$4500 \cdot \frac{k}{100} \cdot 1 = 500 \cdot x \cdot \frac{k}{100} + 500 \cdot 2x \cdot \frac{k}{100} + 500 \cdot 3x \cdot \frac{k}{100}$$

oder $4500 = 500 \cdot x + 500 \cdot 2x + 500 \cdot 3x$

woraus $x = 1\frac{1}{2}$ Jahre.

Anmerk. Man sieht, daß die Procente ganz aus dem Ansatz wegbleiben können, wenn sie bei den Termingeldern eben so hoch gerechnet werden, wie beim ganzen Kapital.

39) Es kauft Jemand ein Grundstück für 800 fl. in 6 Monaten zahlbar; wenn nun der Empfänger eine baare Zahlung verlangt und zwei Terminzahlungen nach je $5\frac{1}{3}$ Monaten zahlbar, wie groß ist ein solches Termingeld, wie groß also die baare Zahlung? A. Ein Termingeld 300 fl., die baare Zahlung 200 fl.

40) Es sollen 5000 fl. nach 2 Jahren zahlbar in 5 gleichen Termingeldern zu 1000 fl. so abgetragen werden, daß jeder folgende Termin 1 Monat länger sei, als der nächstvorhergehende; wann ist der erste anzusetzen? Nach $6\frac{2}{3}$ M.

41) Wenn Jemand 1000 fl. nach $3\frac{1}{2}$ M. 1750 fl. nach 4, 1750 fl. nach 14 M. zu zahlen hat, der Gläubiger aber die ganze Summe von 3500 fl. in 2 Terminen, jedesmal 1750 fl. so verlangt, daß der zweite Termin einen Monat länger sein dürfe, als der erste; wann ist dieser anzusetzen? Nach $3\frac{2}{3}$ Monaten.

42) Wenn ein Kapital in 3 Terminen von 3 zu 3 Monaten in gleichen Raten heimgezahlt 80 fl. Zins zu 5 pct. aus den heimgezahlten Summen eintrug, wie groß war es?

Aus $80 = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{4} + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{4}$, ist $x = 3200$

43) Einer ist a fl. nach n Jahren schuldig, er will x baar zahlen, damit ihm der Rest m Jahre länger gelassen werde?

Ansatz: $a \cdot n = (a - x)(n + m)$

44) Wenn aber b baar gezahlt wird, damit der Rest $n + m$ Jahre benützt werden dürfe, während das Ganze schon nach n Jahren zu zahlen war, so hat man:

$$(b + x)\, n = x\,(n + m)$$

45) Wenn drei gleiche Termingelder in 1, 2, 3 Jahren zahlbar, baaren Werth 3000 fl. haben, wenn man den Rabatt zu 5 pct. abrechnet, wie groß ist jedes?

Erläuterung. Ist der Betrag jedes Termingeldes x, so sei der baare Werth des ersten y

aus $y + y \cdot 1 \cdot \frac{1}{20} = x$, folgt $y = \frac{20x}{21}$

der baare Werth des zweiten z

aus $z + z \cdot 2 \cdot \frac{1}{20}$, folgt $z = \frac{10x}{11}$

der baare Werth des 3ten v

aus $v + v \cdot \frac{3}{20}$, $v = \frac{20x}{23}$

Also da $y + z + v = 3000$, so ist auch $\frac{20}{21}x + \frac{10}{11}x + \frac{20}{23}x = 3000$
und hieraus $x = 1098$ fl. 26 kr. ca.

46) Auf ein Grundstück bietet Einer 8000 fl. so zahlbar, daß 2000 fl. nach 1 Jahre, 6000 fl. aber in 2 Terminen nach 2 und 3 Jahren, oder alles baar [mit 5 pct. Rabatt entrichtet werde; ein Anderer bietet 5000 fl. baar, den Rest in 3 Termingeldern nach 2, 3 und 4 Jahren oder auch baar mit 5 pct. Rabatt. Wenn nun das Angebot des Erstern um 240 fl. 44 kr. vortheilhafter war, welche Summe hat der letztere dem Namen nach geboten?

47) Zu einem Garten melden sich zwei Kauflustige. A bietet 7705 fl., nämlich 3365 fl. baar, 4340 fl. nach 8 Jahren, oder auf Verlangen baar mit 5 pct. einfachem Rabatt. B bietet eine Summe von jetzt an in drei Terminen, jeden von 2 Jahren, in gleichen Summen zahlbar oder auch baar mit 5 pct. Rabatt. Wenn nun beide Angebote gleich sind, wie viel bot der zweite? A. 7722 fl.

Anmerk. Die drei letzten Aufgaben gehören eigentlich unter die Aufgaben mit mehr unbekannten Größen; des Zusammenhangs wegen sind sie aber hier aufgeführt worden.

279) Theilungsrechnung.

1) A, B, C haben Kapitale in einem Geschäft: A 5000 fl. 1 Jahr 3 Monate lang, B 7000 fl. 2 J. 5 M. lang, C 4000 fl. 3 J. lang, welcher Antheil am Gesammtgewinn von 2400 fl. gebührt Jedem?

Erläuterung. Fragt man, wie viel Gewinn auf 1000 fl. in 1 Monat kommen (x), so hat A 75, B 203, C 144 solche Antheile.

Denn A, z. B. hat 5000 fl. 15 Monat lang im Geschäft, was eben so viel ist, als hätte er 1000 fl. 75 Monate lang u. s. f.

Es ist also $75x + 203x + 144x = 2400$

$422x = 2400$

$x = \frac{1200}{211}$

Also hat A $\frac{75 \cdot 1200}{211}$ oder $426\frac{114}{211}$

B $\frac{203 \cdot 1200}{211} = 1154\frac{106}{211}$

C $\frac{144 \cdot 1200}{211} = 818\frac{202}{211}$

Zusammen 2400

Hätte man x den Antheil genannt, der auf 1 fl. Einlage in 1 Monat kommt, so wäre der Ansatz:

$5000 \cdot 15x + 7000 \cdot 29x + 4000 \cdot 36x = 2400$, und hieraus $x = \frac{6}{1055}$ fl.

folglich hat A $\frac{75000 \cdot 6}{1055}$ fl. $= 426\frac{114}{211}$

B hat $\frac{203000 \cdot 6}{1055} = 1154\frac{106}{211}$

C hat $\frac{144000 \cdot 6}{1055} = 818\frac{202}{211}$

Gewöhnlich verfährt man so, daß man sagt: die Summe aller Ansprüche verhält sich zum einzelnen Anspruche, wie der Gesammtbetrag der zu vertheilenden Summe zum einzelnen Antheil.

Für die angegebene Aufgabe hätte man 3 Ansätze gehabt:

$422 : 75 = 2400 : x$

$422 : 203 = 2400 : x$

$422 : 144 = 2400 : x$

Die entstanden wären aus:

$(5000 \cdot 1\frac{1}{4} + 7000 \cdot 2\frac{5}{12} + 4000 \cdot 3) : 5000 \cdot 1\frac{1}{4} = 2400 : x$

$(5000 \cdot 1\frac{1}{4} + 7000 \cdot 2\frac{5}{12} + 4000 \cdot 3) : 7000 \cdot 2\frac{5}{12} = 2400 : x$

$(5000 \cdot 1\frac{1}{4} + 7000 \cdot 2\frac{5}{12} + 4000 \cdot 3) : 4000 \cdot 3 = 2400 : x$

2) Allgemein: stehen die Ansprüche im Verhältniß von $m : n : p$, so ist, wenn die zutheilende Summe a ist,

$m + n + p : m = a : x$

$m + n + p : n = a : y$

$m + p + p : p = a : z$

wo x, y, z die Antheile von A, B, C sind.

Hieraus findet sich der Antheil

$$\text{von A} = \frac{am}{m+n+p}$$

$$\text{von B} = \frac{an}{m+n+p}$$

$$\text{von C} = \frac{ap}{m+n+p}$$

Hätte man, wie oben, gefragt, welcher Antheil des zu Vertheilenden auf eine Einheit des Anspruchs komme, so hätte man gehabt:

$$mx + nx + px = a$$

also $x = \frac{a}{m+p+n.}$ Die Zahl mit der Anzahl der Einheiten in dem Anspruch jedes Einzelnen multiplicirt, gibt dieselben Werthe für das, was A, B, C erhalten.

Dieß ist die sogenannte Gesellschaftsrechnung. Ueber die im bürgerlichen Leben vorkommenden Fälle enthält jedes Rechenbuch Beispiele.

3) Ein Vermögen soll so unter 4 Erben vertheilt werden, daß der erste $\frac{1}{m}$ desselben und a fl. darüber, der zweite $\frac{1}{n}$ und b fl. darüber, der dritte c fl. mehr als $\frac{1}{p}$, der vierte d fl. mehr als $\frac{1}{q}$ erhalte: wie groß war das Vermögen und wie viel erhielt jeder? A. daß Vermögen war:

$$\frac{(a+b+c+d)\,mnpq}{mnpq - npq - mpq - mnq - mnp}$$

280) Handelsrechnungen.

a) Ueber Tara ꝛc.

Bemerkung. Fusti heißt der Abzug am Gewicht, wegen Schadhaftigkeit der Waare. Gutgewicht der Abzug, den der Großhändler dem Krämer gestattet. Tara heißt der Abzug, den man wegen der Umhüllung gestattet. Das Gewicht der Waare mit Einhüllung heißt brutto oder sporco-Gewicht, das Gewicht der Waare ohne Umhüllung Netto-Gewicht.

Ist das Bruttogewicht a, Tara $\frac{m}{100}$, Gutgewicht $\frac{n}{100}$, Fusti $\frac{p}{100}$, so ist das Nettogewicht $a\left(1-\frac{m}{100}\right)\left(1-\frac{n}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Wird Tara vom Stück gerechnet, so zieht man sie zuerst ab, und berechnet dann das Gutgewicht, oder berechnet dieß in Geld und zieht es am Preis ab.

Beisp. Eine auf dem Transport beschädigte Waare wiegt br. $35\frac{1}{2}$ Ctr., Tara 10 pct., Gutgewicht 1 pct., Fusti 8 pct., wie viel Netto?

$$35\tfrac{1}{2}\ (1 - \tfrac{1}{10})\ (1 - \tfrac{1}{100})\ (1 - \tfrac{8}{100}) = x$$

oder von 3550 ℔.

$\frac{1}{10}$ ab wegen Tara	355
	3195
Hievon $\frac{1}{100}$ ab wegen Gutgewicht	31,95
	3163,05
Hievon 8 pct. ab wegen Fusti	253,044
Netto	2910,006

Bei Tara auf den Ctr. werden auf jeden Ctr. Netto einige Pfund vom Verkäufer für die Emballage bewilliget.

Beisp. Wenn 1750 ℔. brutto bei 9 ℔. Tara auf den Ctr. 1327 fl. kosten, was kostet 1 ℔. Netto? Man hat: 109 : 17500 = 100 : x ℔. Netto und hieraus den Preis von 1 ℔. Netto. Oder:

x kr.	=	℔. Netto	1
100	=	℔. br.	109
1750	=	fl.	1327
1	=	kr.	60

Wird Tara vom Stück gerechnet, so wird sie vorerst abgezogen.

b) Ueber Spesen:

Bemerkung. Auslagen bei Besorgung von Geschäften heißen überhaupt Spesen. Sie können in Einkaufs- und Verkaufsspesen unterschieden werden. Werden sie nach Procenten des Preises gerechnet, so werden die Einkaufsspesen auf's Hundert angesetzt, weil sie den eigentlichen Preis um ihren Betrag vermehren und zu jedem Hundert des Preises noch einen Zuschuß aus der Kasse erfordern. Die Verkaufsspesen dagegen vermindern den rückempfangenen Werth an jedem Hundert des angesetzten Verkaufspreises; sie werden also vom Hundert angesetzt. Dabei sieht man ein, daß z. B. die Kosten der Versendung bis zum Ort des Verkaufs als den Einkaufspreis erhöhend als Einkaufsspesen zu behandeln sind; wogegen z. B. der Abzug der Verkaufskosten und der Rücksendung des Geldes vom Hundert geschieht.

Beisp. Ein Nürnberger Kaufmann schickt nach Hamburg zum Verkauf 1 Tonne mit Waare 402 ℔. an Gewicht. Die Waare gilt dort 75 Mk. Bo. für 100 ℔. Netto. Die Versendungskosten von Nürnberg nach Hamburg machen 7 pct. (Auf Hundert). Beim Verkauf in Hamburg gehen noch $3\frac{1}{4}$ pct. Unkosten ab (vom Hundert); das Hamburger Gewicht ist um 15 pct. leichter, als das baierische; Tara 8 pct.; Gutgewicht 1 pct., 300 Mk. Bo. gelten im Kurs 147 Thlr. Ct. Wie viel fl. rhein. wird die Waare einbringen?

? fl. rhein.	= Brutto Baier. ℔.	402
100	= Brutto Hamb. ℔.	115
100	= wegen Tara ℔.	92
100	= wegen Gutgewicht ℔.	99
100	= Mk. Bo.	75
300	= Thlr. Ct.	147
107	= wegen Nürnb. Spesen	100
100	= wegen Hamburg. Spesen	$96\frac{3}{4}$
5	= fl. rhein.	9

c) Ueber Gewinn und Verlust.

Bei Gewinn und Verlust wird immer die Ausgabe = 100 gesetzt und der Gewinn in Procenten auf, der Verlust ab gerechnet. Z. B. 5 pct. Gewinn gibt für 100 Ausgabe 105 Einnahme; 5 pct. Verlust aber für 100 Ausgabe nur 95 Einnahme.

Z. B. Wenn $3\frac{1}{2}$ Ctr. Hamburg. Gewicht br. 500 Mk. Bo. kosten, wie theuer muß man 1 ℔. Netto baier. in Nürnberg verkaufen, wenn man 12 pct. gewinnen will? Tara 12 ℔. vom Ctr. zu 110 ℔.; Gutgewicht 1 pct., Beschädigung 2 pct., Nürnberger Spesen incl. Fracht 10 pct. Kurs 300 Mk. gleich 148 Thlr. Ct.

? fl. rhein.	℔. baier.	1
100	= ℔. Hamburg.	115
99	= wegen Gutgewicht	100
92	= wegen Fusti	100
98	= wegen Tara	110
110	= Ctr. brutto	1
$3\frac{1}{2}$	= Mk. Bo. Ausgabe	500
300	= Rthlr. Ct.	148
110	= wegen Spesen	100
100	= Einnahme	112
5	= fl. rhein.	9

d) Ueber Tausch.

Wenn Waare für Waare gegeben wird, so nennt man dieß Tausch. Das Geschäft tauschen oder barattiren. Man pflegt im Tausch die Waare höher anzusetzen, als wenn man baar bezahlt wird (im Stich), weil die Waare, die man empfängt, erst selbst verkauft werden muß, um den beabsichtigten Gewinn zu geben, somit dieser minder gewiß ist, als im Verkauf.

Benennt man, wenn zwei Kaufleute tauschen, vom Ersten die Menge M, den Kaufpreis K, den Tauschpreis T, vom zweiten die — m, — — — k, — — — t,

so ist 1) $K : k = T : t$

2) $MK = mk$

3) $MT = mt$

d. h. soll keiner Vortheil haben, so muß

1) der Eine den Tauschpreis in demselben Verhältniß erhöhen, wie der Andere;

2) der Gesammtkaufpreis der Waare des Einen muß dem Kaufpreis der Waare des Andern gleich sein;

3) Auch die Gesammttauschpreise müssen gleich sein.

Beispiele:

1) A hat Waare, den Ctr. im Stich um 79 fl., im Tausch 85 fl.; B das Pfund zu 38 kr. im Stich, wie hoch muß dieser das Pfund im Tausch setzen? Aufl. nach 1) $79 : 38 = 85 : x$

2) A hat Waare 179 Pfund, das Pfund zu $52\frac{1}{2}$ kr. im Stich, im Tausch zu 54 kr.; B bietet Waare entgegen das Pfund im Stich zu 30 kr.; wie viel Waare des B kann A verlangen? Aufl. aus 2) $179 . 52\frac{1}{2} = x . 30$, oder man hat aus 1) $52\frac{1}{2} : 30 = 54 : x$ und $54 . 179 = y . \frac{30 . 54}{52\frac{1}{2}}$, wo x der Tauschpreis von 1 Pfund des B, y die Waarenmenge ist, die der A erhält.

$$y = \frac{54 . 179 . 52\frac{1}{2}}{30 . 54} = \frac{52\frac{1}{2} . 179}{30}, \text{ wie im ersten Fall.}$$

Soll Waare gegen Geld und Waare vertauscht werden, so ist, wenn b das baare Geld bezeichnet

$$MK = mk + b$$

Beispiele:

1) A vertauscht $1\frac{1}{2}$ Ctr. Waare im Stich zu 48 fl. den Ctr. gegen 38 Pfund Waare zu 2 fl. 24 kr. Kaufpreis, wie viel muß er baar erhalten? Ansatz: $1\frac{1}{2} . 48 = 38 . 2\frac{2}{5} + x$

2) A vertauscht 100 Pfund Waare zu $3\frac{1}{2}$ fl. das Pfund im Stich an B gegen eine Waare von $3\frac{3}{8}$ fl. das Stück und verlangt 100 fl. baar: wie viel Stück erhält er? Ansatz: $100 . 3\frac{1}{2} = x . 3\frac{3}{8} + 100$

Wird ein Theil des Tauschwerthes baar verlangt, so ist die Erhöhung des baaren Werthes zum Tauschwerth auf folgende Art zu bestimmen. Ist T der Tauschwerth, den bei M Waare A verlangt; K der baare Werth; b der baare Betrag, der von jedem Stück verlangt wird, so kann man dieß so betrachten, als ob im Gesammtwerth von Mb verkauft, im baaren Werthe von M (K — b) vertauscht würde. Ist also k der baare Werth der Waare des B und m seine Menge, so ist allemal $M (K - b) = mk$, woraus man m leicht findet. Die Erhöhung des baaren Werthes K zu T bezieht sich offenbar blos auf die vertauschte Menge und beträgt am Stück $K - b : T - b$. Man hat also: $K - b : T - b = k : \frac{k (T - b)}{K - b}$

Beisp. A hat 24 Ctr. das Pfund baar zu $2\frac{3}{4}$ fl. im Tausch 3 fl., er verlangt $\frac{1}{4}$ des Tauschwerthes baar; B hat Waare 1 Stück zu $1\frac{1}{3}$ fl. baar. Es fragt sich: 1) wie hoch gibt B 1 Pfund im Tausch, 2) wie viel Waare gibt er, 3) wie viel baar?

1) $2\frac{3}{4} - \frac{3}{4} : 3 - \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3} : x$ daher $x = 1\frac{1}{2}$ fl.

2) $2400 (2\frac{3}{4} - \frac{3}{4}) = y . 1\frac{1}{3}$ daher $y = 3600$ Stück.

3) $2400 . \frac{3}{4} = 1800$ fl. baar.

Fragt man nach dem Gewinn, so soll dieser nach Procenten bestimmt, $\frac{p}{100}$ betragen von dem ganzen Kapital, das B umsetzt. So ist wenn A, wie im vorigen Falle, b vom Stück baar verlangt, das wahre Kapital des B wie oben $Mb + mk$; folglich der Gewinn $(Mb + mk) \frac{p}{100}$, folglich der baare Werth der Waare des A:

$$MK = Mb + mk + (Mb + mk) \frac{p}{100}$$

Verlangt er keine baare Zahlung,

so ist $b = 0$, also $MK = mk + mk . \frac{p}{100}$

Wollte z. B. in voriger Aufgabe B 8 pct. Gewinn machen, so fragt sich, wie viel er Waare gäbe? Es ist:

$$2400 \cdot 2\tfrac{3}{4} = 2400 \cdot \tfrac{3}{4} + 1\tfrac{1}{3}x + (2400 \cdot \tfrac{3}{4} + 1\tfrac{1}{3}x) \cdot \tfrac{8}{100}$$

Daher $x = 3233\tfrac{1}{3}$ Stück.

d) Münzrechnungsaufgaben.

In jedem Lande ist bestimmt, welche Menge fein Silber oder Gold in einer gewissen Münze sein soll. Das Verhältniß der Münze zu der als Einheit angegebenen Menge fein Silber (in Teutschland 1 Mark Cöln.) heißt der Münzfuß. Man spricht daher vom 20 fl. Fuß dann, wenn angenommen ist, daß 1 fl. $\frac{1}{20}$ der Mark fein Silber; vom 24 fl. Fuß, wenn 1 fl. $= \frac{1}{24}$ Mark fein Silber ist. Um die Münzen dauerhafter zu machen, vermischt man das Silber mit Kupfer; prägt aber die Münze desto größer. 1 Mark dieses Gemisches heißt rauhe Mark; der Feingehalt der rauhen Mark Korn; das Gewicht der Münze Schrot. Die Kosten des Prägens werden durch einen kleinen Abzug am Gewicht der Münze ersetzt, was man Remedium nennt.

Bezeichnet man durch
M die Mark, die als Einheit zu Grunde liegt,
F die Menge der Stücke aus 1 Mk. fein oder den Münzfuß,
S das Schrot,
k das Korn,
v den Werth der Münze in Grundtheilen,
w das Gewicht derselben in Feinsilber,
f die Menge der Stücke in feiner Mark,
r — — — — in rauher Mark,
so hat man folgende Gleichungen:

1) $rS = M$, 2) $rw = k$, 3) $fw = M$, 4) $fv = F$.

Hieraus folgt:

5) $rS = fw$ oder $r : f = w : S$

6) $M : k = S : w$, 7) $M : k = f : r$

8) $M : w = F : v$

Ist die Größe der Mark M gegeben, so braucht man nur noch 3 dieser Stücke zu kennen, um alle übrigen zu finden, doch muß entweder Korn oder Schrot unter den gegebenen sein.

Beisp. 25 Conventionsthaler wiegen 3 Mark; das Korn ist 13 Loth 6 Grän; sie sind im 20 fl. Fuß geprägt; so ist S = $\frac{48}{25}$ Loth. k = $13\frac{1}{3}$. F = 20 fl., M = 16. Hieraus hat man: r = $8\frac{1}{3}$ Stück, f = 10, w = $1\frac{3}{5}$, v = 2 fl.

e) Agio und Disconto.

Wenn schlechtere Münzen gegen bessere verwechselt werden, so heißt das, was man auf die schlechtere zulegen muß, Aufgeld, Agio. Umgekehrt das, was man von der bessern zurückbehalten darf, Disconto. Doch wird dieser Unterschied nicht immer genau beobachtet. Beides kann eben sowohl bei wirklich geprägten als bei Rechnungsmünzen, (solchen, die unter dem Namen einer Münze nur eine gewisse Menge Silber bezeichnen, ohne ausgeprägt und im Umlauf zu sein) statt finden.

Beisp. 100 Thlr. Ct. in Louisd'ors seien $108\frac{1}{2}$ Thlr. in Silber gleich, wie viel kosten 800 Thlr. in Ldr.? A. 872 Thlr. Also Agio 72 Thlr.

f) Wechselrechnungen.

Wenn A in Nürnberg eine Forderung zu machen hat an B in Leipzig, so kann er sich so bezahlt machen, daß er eine Anweisung auf B ausstellt, das Geld jedem zu zahlen, der in der Anweisung genannt sein wird. Diese Anweisung tritt er dann einem dritten C ab, von welchem er das empfängt, was er von B zu fordern hat, wogegen C in die Forderung des A eintritt und das Geld von B erheben kann. Eine solche Anweisung heißt ein Wechsel, wenn sie in einer gewissen Art ausgestellt ist, welche man so wie die nähere Kenntniß der Sache in größeren Werken über diesen Gegenstand finden wird. Hier nur so viel: Ist C der Eigenthümer dieser Forderung an B, so kann er sie einem D, dieser einem E ꝛc. abtreten. Dabei ist es gar nicht nöthig, daß diese immer an demselben Orte wohnen. Vielmehr kann der Wechsel gleich von A, C, D.., an einen andern Ort gesendet und dort verkauft, oder statt einer Schuld abgetreten werden. Eben so kann aber auch A mit B an demselben Orte wohnen. Kurz diese Anweisung kann wie eine Summe von Münze in Leipzig auf einen gewissen Tag zahlbar betrachtet und Jedem verkauft werden, der Lust hat, zu der festgesetzten Zeit eine solche

Summe baar in Leipzig zu besitzen. Diese Anweisungen oder Wechsel sind also eine Art Waare und es tritt bei ihnen dasselbe, was bei der Waare ein, daß nämlich, wenn sich Viele erbieten, Wechsel auf denselben Ort hin auszustellen, oder zu trassiren (Forderungen daselbst abzutreten) und nur Wenige dergleichen nöthig haben, die Wechselaussteller oder Trassanten (Eigenthümer der Forderungen) weniger für ihre Wechsel bekommen werden, als im umgekehrten Fall bei wenig Angebot und starker Nachfrage. So kommt es denn, daß z. B. in Nürnberg die Wechsel auf andere Orte z. B. Hamburg ausgestellt (Forderungen Nürnberger Kaufleute in Hamburg) nicht immer gleich viel gelten, sondern daß sie wie andere Waare im Preise wechseln. Man nennt nun diesen Preis der Wechsel den Kurs, Wechselkurs, wie man auch wohl den Preis der Geldsorten den Geldkurs nennt. Beim Kurs wird immer eine bestimmte Münz-Summe des einen Ortes als unveränderlich angenommen (beständige Valuta), während die Aenderungen des Preises in der Münze des andern Ortes angegeben wird (wechselnde oder wandelbare Valuta). So hat z. B. Hamburg gegen alle Städte Teutschlands die feste Valuta, so daß man rechnet 300 Mark Banko daselbst sind gleich 148 Thlr. Courant mehr oder weniger.

Es können im Wechselhandel hauptsächlich folgende Rechnungen vorkommen.

1) Berechnung des Kurses zwischen zwei Plätzen aus andern Kursen.

Beisp. A in Nürnberg schickt einen Wechsel nach London, den er 1 Lst. zu 6¾ Thlr. Ct. gekauft hat und läßt von dort dafür Hamburger Wechsel kommen (d. h. Forderungen von Londoner Kaufleuten in Hamburg) 1 Lst. zu 36 Schill. 7 R. vl.; wie bestimmt sich dadurch der Kurs zwischen Nürnberg und Hamburg (d. h. wie viel Thlr. Ct. gibt man für 300. M. Bo. in Hamburg)?

? Thlr. Ct.	=	Mk. Bo.	300
3	=	Schill. vl.	8
$36\frac{7}{12}$	=	Thlr. Ct.	$6\frac{3}{4}$

A. 147,6 Thlr. Ct. für 300 Mk. Bo.

2) Wechselreductionen.

a) Einfache Wechselreductionen finden überall statt, wo man nach dem Betrag eines Wechsels nach gewissem Curse fragt. Z. B.

Wenn der Kurs von Nürnberg nach Leipzig 99¾ ist, d. h. wenn man für 99¾ Thlr. baar in Nürnberg eine Forderung von 100 Thlrn. in Leipzig kauft, wie hoch kommt ein Leipziger Wechsel von 297 Thlr.?

b) Sendet man aber einen Wechsel nach B, um ihn dort verkaufen, für den Betrag einen Wechsel auf C einkaufen zu lassen, den man wieder in C verkaufen läßt und endlich einen Wechsel auf D sich verschafft, so heißt dieß über B und C nach D zahlen und es ändert sich natürlicherweise der Betrag, den man für die zuerst ausgegebene Summe in D zuletzt besitzt, nach Maßgabe der Kurse in den Zwischenorten B und C. Der umgekehrte Fall tritt ein, wenn man sich Forderungen, die man am Orte D zu erheben hat, dort auf C anweisen, in C verkaufen und dafür Anweisung auf B geben läßt, die man erst in A verkauft und so erst die Forderung einzieht.

Beisp. A in Nürnberg hat 4000 Mk. Bo. in Hamburg zu zahlen; wenn er nun über Leipzig zahlt und der Leipziger Kurs 99¾, der Hamburger von Leipzig aus 148¾ ist, wie hoch kommen sie ihm in rhn. Währung?

? fl. rhn.	=	Mk. Bo.	4000
300	=	Leipz. Thlr.	148¾
100	=	Nbg.	99¾
5	=	fl. rhn.	9

Hat A in Amsterdam 3000 fl. holl. zu erheben und bezieht er es über Hamburg, wie viel erhält er, wenn der Kurs von Amsterdam nach Hamburg 33¼ Stüber holl. = 2 Mk. Bo. in Hamburg und 300 Mk. Bo. = 148 Thlr. Ct. in Nürnb. sind?

? fl. rhn.	=	fl. holl.	3000
1	=	Stüber holl.	20
33¼	=	Mk. Bo. Hbg.	2
300	=	Thlr. Ct.	148
5	=	fl. rhn.	9

3) Berechnung des Gewinns oder Verlusts beim Wechselhandel.

Es findet hier kein wesentlicher Unterschied zwischen der Berechnung des Gewinns und Verlusts bei andern Waaren statt. Es läßt sich auch hier fragen:

a) wie viel überhaupt gewonnen oder verloren worden?
b) wie viel an der Einheit der gebrauchten Münze?
c) wie viel am Kurse?
d) wie viel Procente?

Beisp. A in Nürnberg kauft 500 Louisd'or zu 9 fl. 20 kr. rhn., sendet sie nach Hamburg, wo sie $10\frac{7}{8}$ Mk. Bo. kosten. Von Hamburg wird ihm die Auslage vergütet durch einen Wechsel im Kurs zu 148 Thlr. für 300 Mk. (Valuta remittirt). Mäklergebühren beim Einkauf $1\frac{0}{m}$, Porto 1 pct., Provision und Spesen in Hamburg 1 pct., so fragt sich, ob und wie viel A gewonnen habe?

a) überhaupt?

Ausgabe: ? fl. Ldr. 500

1001 : 1000 wegen Einkaufsspesen

1 : $9\frac{1}{2}$

4662 fl. ca.

Einnahme: x fl. rhn. = Ldr. 500

100 = wegen Porto 99

1 = Mk. Bo. $10\frac{7}{8}$

100 = wegen Spesen 99

300 = Thlr. Ct. 148

5 = fl. rhn. 9

x = 4732 fl. 24 kr. ca.

Also Gewinn = 70 fl. 24 kr.

b) Um zu finden, wie viel am Louis'dor gewonnen, hat man:

500 : 1 = 70 fl. 24 : x

c) Fragt man, welcher Kurs sich durch dieses Geschäft zwischen Hamburg und Nürnberg herstellt und wie viel also am Kurs gewonnen oder verloren worden, so ist:

x Thlr. Ct.	für	Mk. Bo.	300
1000	= wegen	Courtage	1001
$10\frac{7}{8}$	= fl. rhn.		$9\frac{1}{3}$
9	= Thlr. Ct.		5
99	= wegen	Porto	100
99	= wegen	Spesen	100

x = 146,09

Also am Kurs 1,91 Thlr. gewonnen.

d) Fragt man, wie viel Procente gewonnen worden, so hat man:

x Thlr. Einnahme	für	Thlr. Ausgabe	100
1001	bringen	Einnahme	1000
5	= fl. rhn.		9
$9\frac{1}{3}$	= Mk. Bo.		$10\frac{7}{8}$
300	= Thlr. Ct.		148
100	= wegen	Porto	99
100	= wegen	Spesen	99

x = 101,307

4) Arbitrage.

Es ist bereits bemerkt worden, daß es möglich ist, Forderungen von einem andern Orte unmittelbar einzuziehen, oder über dritte Orte; eben so Zahlungen unmittelbar zu leisten, oder über dritte Orte (§. 2). Ehe man also für einen dieser Wege sich bestimmt, ist zu beurtheilen, welcher der vortheilhafteste sei (zu arbitriren, woher Arbitrage). Man kann dabei fragen:

1) Wie viel Vortheil sich am Betrag des Wechsels ergebe?
2) Wie viel am Curse?
3) Wie viel in Procenten?
4) Welcher Weg im Allgemeinen vorzuziehen?

Beisp. Nürnberg hat nach London eine gewisse Summe zu zahlen. Die Curse stehen:

1) Direct 9 fl. 42 kr. im 20 fl. Fuß gegen 1 Lst.
2) Nach Hamburg $144\frac{1}{2}$ Thlr. Ct. = 300 Mk. Bo. Von Hamburg nach London $34\frac{1}{2}$ Schlg. Bläml. = 1 Lst.
3) Nach Amsterdam $137\frac{3}{4}$ Thlr. Ct. = 250 fl. holl. Ct. Von Amsterdam nach London $35\frac{1}{4}$ Schlg. Bläml. für 1 Lst.

2) Ueber Hamburg:			3) Ueber Amsterdam:		
? fl. Ct.	= Lst. 1		? fl. Ct.	= Lst. 1	
1	= Schlg. Bläml.	34½	1	= Schlg. Bl.	35¼
8	= Mk. Bo.	3	10	= fl. Holl.	3
300	= Thlr. Ct.	144½	250	= Thlr. Ct.	137¾
1	= fl. Ct.	1½	1	= fl. Ct.	1½
x	= 9 fl. 20¾ kr.		x	= 8 fl. 44½ kr.	

Es ist also am vortheilhaftesten, über Amsterdam zu zahlen, da man hier mit der geringsten Summe die größte Summe in London berichtigen kann. Wäre umgekehrt Geld aus London zu beziehen, so würde der unmittelbare Verkauf des Londoner Wechsels in Nürnberg am vortheilhaftesten sein, da man hier für 1 Lst. die größte Summe erhielte. Die Berechnung des Gewinns in Procenten und im Ganzen hat keine Schwierigkeit.

5) Wechselkommissionen.

Der Verkauf der Wechsel an einem andern Orte und der Einkauf oder die Ausstellung neuer daselbst, um den vortheilhafteren Kurs zu benützen oder zu andern Zwecken, erfordert die Aufstellung von Personen, welche diese Geschäfte besorgen. Ist dabei nicht vorgeschrieben, zu welchem Curs das Geschäft ausgeführt werden soll, so enthält das bisher Gesagte die erforderliche Erläuterung. Sind aber die Curse angegeben, unter welchen man dem Auftrag Genüge leisten darf, so ist Folgendes zu bemerken.

Es sey zwischen Frankfurt und Hamburg von einem in Nürnberg wohnenden Commissionär ein Geschäft auszuführen, und zwar soll nach Hamburg trassirt (d. h. auf Erhebung der Summe in Hamburg eine Anweisung gegeben), nach Frankfurt remittirt (d. h. der Betrag in einer auf Frankfurt lautenden Anweisung vergütet) werden: so sey der für die Tratte vorgeschriebene Curs 148 Thlr. = 300 Mk. Bo.; für die Rimesse 99¾ Thlr. = 100 Thlr., d. h. man gibt für 100 Thlr. nach 2 Mon. in Frankfurt zahlbar in Nürnberg 99¾, so würde sich der Curs zwischen Frankfurt und Hamburg dadurch zu 147⅝ ca. stellen, und es fragte sich, wie bei gewisser Aenderung des Curses für die Tratte oder Rimesse sich der Curs für die Rimesse oder umgekehrt müsse geändert haben, um den vorgeschriebenen Curs zu halten.

Hat sich also

1) der Kurs für die Tratte geändert, z. B. auf 148½ Thlr., so kann das Geschäft unbedingt ausgeführt werden, wenn nicht zugleich eine Aenderung im Kurs für die Rimesse erfolgt ist. Denn man erhält in N. für die Hamburger Wechsel mehr als vorher gezahlt, kann also eine größere Summe nach Fr. remittiren. Hat sich aber der Kurs für die Tratte bei gleichem Kurs für die Rimesse verringert; ist er z. B. 147¾, so kann das Geschäft nicht so ausgeführt werden, wie der Auftrag sagt; denn beim Verkauf des Hamburger Wechsels geht weniger ein, als nöthig wäre, um den vorgeschriebenen Kurs zwischen F. und H. zu halten.

2) Bleibt der Kurs für die Tratte unverändert, ändert sich aber der Kurs für die Rimesse, so sieht man, daß eine Erhöhung Nachtheil bringt, denn man muß nun in N. mehr ausgeben, um denselben Betrag nach F. anzuweisen, als vorher; sinkt er, so entsteht Vortheil.

Das Gesagte gilt übrigens nur, wenn N. die wandelbare Valuta gegen beide Orte F. und H. hat.

Ist aber der Kommissionär in H. und hat er nach N. zu 148 zu trassiren und nach F. zu 147⅜ zu remittiren, so erhellet, daß wenn

1) der Kurs zwischen H. und N. steigt, es beim Verkauf des Wechsels Nachtheil bringt, denn man erhält nur für eine größere Summe gleichviel in Hamburg; z. B. für 148½ Thlr. nur eben solche 300 Mk., wie vorher für 148, fällt er, so ist dieß vortheilhaft, da man alsdann für eine kleinere Summe gleichviel Mark H. erhält, z. B. für 147 Thlr. eben so viel, als für 148.

2) Die Steigerung des Kurses für die Rimesse ist vortheilhaft, weil man für dieselbe Summe in H. eine größere Summe in F. anweisen kann; das Fallen des Kurses ist nachtheilig, weil für dieselben 300 Mk. in H. weniger in F. zur Verfügung gestellt werden können.

Es läßt sich dieß auf folgende Weise überschauen:

I. Hat der Ort des Kommissionärs beständige Valuta
und es wird der Kurs für

die Tratte	die Rimesse
höher —— Nachtheil	höher —— Vortheil
niedriger —— Vortheil	niedriger —— Nachtheil.

II. Hat der Ort des Kommissionärs veränderliche Valuta
und es wird der Kurs für

die Tratte	die Rimesse
höher —— Vortheil	höher —— Nachtheil
niedriger —— Nachtheil	niedriger —— Vortheil.

Haben sich beide Curse geändert, so läßt sich hieraus leicht beurtheilen, ob beide zum Vortheil oder Nachtheil sich ausgleichen oder welcher überwiegt.

Beispiele:

1) Nürnberg soll zu 148 nach Hamburg trassiren und zu 99¾ nach Frankfurt remittiren. Ist der Kurs zur Tratte 147½, wie muß der Kurs zur Rimesse werden? A. Er muß in demselben Verhältniß fallen, in welchem jener gefallen ist, damit sich der Verlust bei der Tratte durch Gewinn bei der Rimesse ausgleiche.

Also: $148 : 147\frac{1}{2} = 99\frac{3}{4} : x$

2) Nürnberg soll nach Frankfurt trassiren zu 99½ und nach Hamburg remittiren zu 148; ist nun der Kurs zur Rimesse gestiegen auf $148\frac{1}{2}$; wie muß der Kurs zur Tratte wenigstens genommen werden?

$148 : 148\frac{1}{2} = 99\frac{1}{2} : x$

3) Hamburg soll zu $148\frac{1}{2}$ nach Nürnberg trassiren und zu 148 nach Leipzig remittiren; wenn nun der Kurs zur Tratte 148 geworden, wie stark darf der Kurs zur Rimesse gefallen seyn?

$148\frac{1}{2} : 148 = 148 : x$

4) Hamburg soll zu 35 Stbr. holl. Ct. nach Amsterdam trassiren und zu 34 Schllg. vl. Bo. nach London remittiren. Ist nun der Kurs nach Amsterdam $34\frac{1}{2}$, wie stark darf der Kurs zur Rimesse gestiegen seyn, damit kein Nachtheil erwachse:

$34\frac{1}{2} : 35 = 34 : x$

5) Hamburg soll nach Nürnberg trassiren und nach London remittiren und zwar in solchen Kursen, daß sich der Kurs zwischen Nürnberg und London 9 fl. 42 kr. stellt. Ist nun der Kurs zur Rimesse

35 Schllg. vl., wie muß der Kurs zwischen Hamburg und Nürnberg seyn, um den verlangten Kurs zwischen N. und L. herzustellen?

? Rthlr. Mk. Bo. 300
3 = Schllg. vl. 8
35 = Lst. 1
1 = fl. $9\frac{7}{10}$
3 = Thlr. 2

x = $147\frac{6}{10}$ Thlr.

6) Hamburg hat nach Nürnberg zu 148 zu trassiren, nach Amsterdam zu 35 zu remittiren, es findet den ersten Kurs $148\frac{1}{2}$, den zweiten $34\frac{1}{2}$: darf es das Geschäft ausführen?

A. das Steigen des Kurses nach Nbg. ist nachtheilig, das Fallen des Amstd. ebenfalls, somit das Geschäft unausführbar.

Wäre aber der Amst. Kurs $35\frac{1}{4}$ gewesen, so fragt sich, ob jenes Steigen im Verhältniß zur ganzen Summe $\gtrless$ als dieses ist.

Das Steigen ist dort $\frac{1}{2} : 148$ zum Nachtheil = 1 : 296
Das Steigen ist hier $\frac{1}{4} : 35$ zum Vortheil = 1 : 140
somit das Geschäft ausführbar, da $\frac{1}{140} > \frac{1}{296}$.

Wäre der Kurs nach Nbg. $147\frac{1}{2}$, der nach Amst. $34\frac{7}{8}$ gewesen, so hätte man:

$\frac{1}{2} : 148$ zum Vortheil = 1 : 296
$\frac{1}{8} : 35$ zum Nachtheil = 1 : 280
somit das Geschäft ausführbar.

Man kann hier auch die Kettenregel anwenden:

Z. B. Berlin hat Ordre auf Hamburg zu $143\frac{1}{2}$ Rthlr. in Ld'ors. zu trassiren und nach Paris zu 77 Rthlr. für 300 Frks. zu remittiren; ist nun der erste Kurs $143\frac{3}{4}$, der letztere $77\frac{1}{4}$, darf das Geschäft vollzogen werden?

x Mk. Bo.	Fr. 3		? Mk. Bo.	Fr. 3
300 =	Rthlr.	77	300 =	$77\frac{1}{4}$
$143\frac{1}{2}$ =	Mk. Bo.	300	$143\frac{3}{4}$ =	300
x =	$\frac{46}{287}$ |	$\frac{66}{41}$	x =	$\frac{927}{575}$

Da nun 66 . 575 < 41 . 927, so ist der letzte Fall nachtheilig. Denn man bedarf mehr, um dasselbe Geschäft auszuführen.

der auch so:

? Fr. = Fr. 3
300 = Rthlr. 77
$143\frac{1}{4}$ = Mk. Bo. 300
300 = Rthlr. $143\frac{3}{4}$
$77\frac{1}{4}$ = Fr. 300

$x = 2\frac{2}{4}\frac{0}{2}\frac{4}{3}$, somit weniger, als 3.

281) b) Vermischte Aufgaben.

1) Ein Bedienter bekommt jährlich 50 fl. Lohn und ein Kleid. Nach 4 Monaten bekommt er den Abschied und das Kleid als Lohn angerechnet, wie hoch ist dieses angesetzt? A. 25 fl.

2) Wenn in einer Stadt die Häusersteuer von $\frac{1}{m}$ des Miethgeldes auf $\frac{1}{m-n}$ erhöht wird, um welchen Theil des bisherigen Miethgeldes muß dieses erhöht werden, damit der Hauseigenthümer eben so viel für sich behalte, als bisher?

Um $\frac{n}{(m-n-1)\,m}$tel des bisherigen Miethgeldes.

3) Jemand kauft ein Stück Tuch, 9 Ellen für 48 fl. 36 kr.; er verkauft es 10 Ellen für 57 fl. 40 kr.; wie viel waren es Ellen, wenn er im Ganzen 5 fl. 48 kr. gewonnen hat? $15\frac{9}{11}$ Ellen.

4) Ein Körper folgt einem andern in gerader Linie nach; der erste macht in m Sekunden n Fuß, der andere in p Sekunden q Fuß. Der erste geht r Sekunden früher von dem Ort A aus, als der zweite von dem Orte B, welcher um a Fuß rückwärts von A liegt: wann wird der zweite den ersten einholen? A. $\frac{p\,(ma+nr)}{mq-np}$

5) Wenn aber der Ort B vorwärts im Weg gelegen wäre, so hätte man:

$$x = \frac{p\,(nr-ma)}{mq-np}$$

6) Wäre der Ort B rückwärts gelegen, aber der erste Körper um r später abgegangen, so käme:

$$x = \frac{p\,(ma-nr)}{mq-np}$$

7) Gingen beide von den Punkten A und B, die um a entfernt wären, aus einander entgegen und dabei der erste um r Sekunden früher ab; so wäre

$$x = \frac{p\,(ma-nr)}{mq+np}$$

8) Wäre der erste um r Sekunden später abgegangen, so hätte man

$$x = \frac{p\,(ma + nr)}{mq + np}$$

9) Folgt der eine dem andern und gehen beide zugleich von A und B aus, wobei B rückwärts im Weg liege, so ist

$$x = \frac{pma}{mq + np}$$

$x = \frac{pma}{mq - np}$

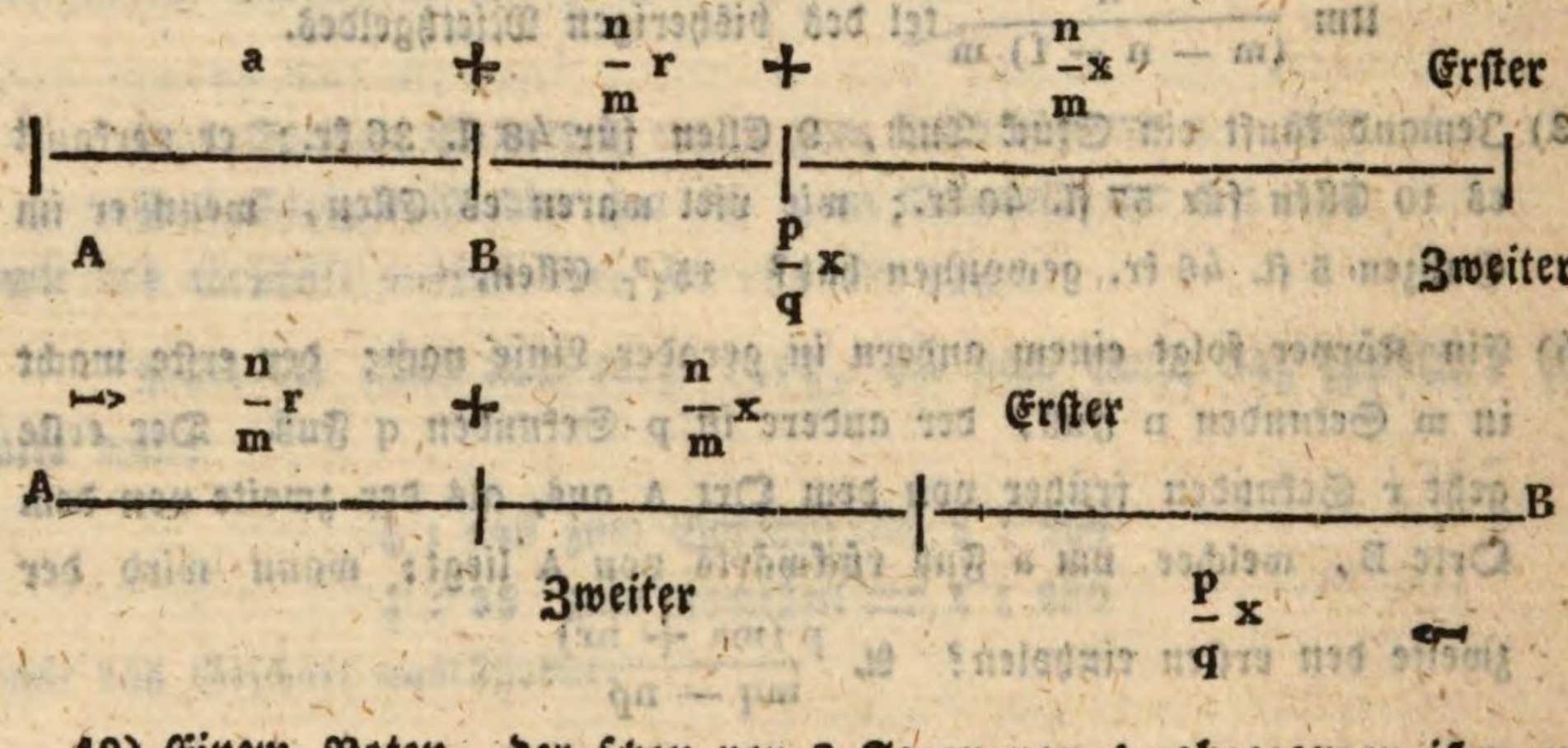
10) Gehen sie von demselben Punkt aus und ist der erste um r Sekunden früher abgegangen, als der zweite, so ist

$$x = \frac{pnr}{mq - np}$$

11) Gehen sie einander von den um a entfernten Orten A und B aus zugleich entgegen, so ist

$$x = \frac{pma}{mq + np}$$

Zur Erläuterung der Aufgaben (4 – 12) werden folgende Linien dienen:



12) Einem Boten, der schon vor 6 Tagen von A abgegangen ist, und täglich 4 Meilen macht, wird ein anderer auf demselben Wege nachgeschickt, der täglich 6 Meilen macht, wann wird er ihn einholen? A. in 12 T.

13) Ein Körper macht in 1 Minute 20 Fuß; nachdem er 4 Minuten in Bewegung ist, folgt ihm ein anderer auf dem Fuße nach, der ihn in 18 Minuten einholt; wie viel Fuß legt dieser in 1 Minute zurück? A. $24\frac{4}{9}$ Fuß.

14) Ein Körper bewegt sich gleichförmig im Kreise a und macht in 1 Zeittheil n Grade, ein anderer geht zugleich mit ihm aus und macht in derselben Zeit m Grade, wann wird er wieder über ihm stehen? A. in $\frac{a}{m - n}$ Zeittheilen.

Zum 2ten, 3ten, 4ten, rten Male:

$$\frac{2a}{m-n}, \frac{3a}{m-n}, \ldots \frac{ra}{m-n}$$

Gehen sie aber einander entgegen, so ist die Zeit des Zusammentreffens

$$\frac{a}{m+n}, \frac{2a}{m+n}, \ldots \frac{ra}{m+n}$$

15) Der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr gehen um 12 Uhr zugleich von einem Punkt aus nach derselben Richtung hin. Wann treffen sie zum ersten, 2ten . . . Male zusammen? A. in $5\frac{5}{11}$ Min. über 1 Uhr ꝛc.

16) Eine Zahl wird um a vermindert, sodann um $\frac{1}{m}$ des Rests vermehrt; abermals um a vermindert und wieder um $\frac{1}{m}$ des Rests vermehrt, nochmals um a vermindert und wieder um $\frac{1}{m}$ des Rests vermehrt, und beträgt alsdann das nfache der ersten Summe; wie groß war diese?

$$\text{A. } \frac{(3m^3 + 6m^2 + 4m + 1)\,a}{(m+1)^3 - m^3 n}$$

Ist z. B. $a = 100$, $m = 2$, $n = 3$, so ist $x = 1900$.

17) Wird aber eine Zahl um a vermindert und vom Rest $\frac{1}{m}$ des Rests weggenommen; dieses wieder um a vermindert und darauf $\frac{1}{n}$ des Rests weggenommen; wieder a abgezogen und sodann $\frac{1}{p}$ des Rests weggenommen, so soll $\frac{1}{q}$ der Zahl bleiben, welche ist diese Zahl?

$$\text{A. } \frac{aq\,(p-1)\,(3mn - 2m - n + 1)}{mnp\,(q-1) - q\,[p\,(m+n-1) + (m-1)(n-1)]}$$

Ist z. B. $a = 100$, $m = 2$, $n = 3$, $p = 4$, $q = 5$, so ist $x = 3000$.

18) Jemand hat drei Stücke Metall von gleicher Größe. Vom ersten wiegen $5^{c''}$ $69\frac{3}{4}$ Loth, vom zweiten $3\frac{1}{3}{}^{c''}$ 41 Loth, vom dritten $4\frac{2}{7}{}^{c''}$ 91 Loth. Wenn sie nun zusammen 89 ℔. 1 Loth wiegen, wie groß ist jedes Stück? A. $60^{c''}$.

Dritter Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades mit zwei und mehr unbekannten Größen nebst Aufgaben.

§. 1.

Auflösung der Gleichungen.

282) Hat eine Aufgabe zwei oder mehr unbekannte Größen, so muß sie so viel von einander unabhängige Angaben enthalten, als Größen gesucht werden und es müssen sich diese Angaben in eben so viele Gleichungen fassen lassen.

1) Mit 2 unbekannten Größen:

$$\text{I)}\quad ax + by = m$$
$$\text{II)}\quad cx + dy = n$$

283) I) Auflösungsart durch Substitution.

Regel: 1) Man suche aus der einen Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe ausgedrückt durch bekannte Größen und die andere unbekannte.

2) Setze diesen Werth statt der gesuchten Zahl in die zweite Gleichung (substituire ihn derselben), so hat die zweite Gleichung nur mehr eine unbekannte Zahl.

3) Aus dieser Gleichung suche den Werth dieser zweiten unbekannten Zahl, so erhält man diese in bekannten Zahlen ausgedrückt.

4) Diesen Werth setze in den Ausdruck (I.) für die erste unbekannte Größe, in welchem die zweite noch vorkommt, so ist auch die erste unbekannte Zahl blos in bekannten ausgedrückt; somit die Gleichungen aufgelöst.

Aus Gleichung I) folgt nach 1)

$$x = \frac{m - by}{a}$$

Dieß für x in II. gesetzt nach 2) gibt

$$c \cdot \frac{m - by}{a} + dy = n$$

Hieraus kommt nach 3)

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc}$$

Dieß nach 4) in den für x gefundenen Werth gesetzt, gibt

$$x = \frac{m - b \cdot \frac{an - cm}{ad - bc}}{a} = \frac{dm - bn}{ad - bc}$$

284) II. Auflösungsart durch Verbindung der Gleichungen.

Regel. 1) Verändere beide Gleichungen so, daß die eine unbekannte Größe in beiden gleiche Factoren (am bequemsten das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der bisherigen Factoren) enthält.

2) Verbinde beide Seiten beider Gleichungen entweder durch Addition oder Subtraction (30, b) so, daß das Glied wegfällt, worin die unbekannte Größe enthalten ist, so hat man eine Gleichung mit nur mehr einer unbekannten Größe;

3) Diese löse man auf, so ist eine der unbekannten Größen gefunden.

4) Die andere findet man entweder auf dieselbe Weise, oder durch Substitution.

Hat man also, wie oben,

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

So mache nach 1) durch Multiplication beider Seiten der ersten Gleichung durch c, der zweiten durch a.

$$\text{I)}\quad acx + bcy = mc$$
$$\text{II)}\quad acx + ady = an$$

Ziehe, je nachdem $mc \gtrless an$ I. von II. oder umgekehrt ab, so kommt:

$$bcy - ady = mc - an$$
$$\text{oder}\quad (bc - ad)\, y = mc - an$$
$$\text{also}\quad y = \frac{mc - an}{bc - ad}$$

Substituirt man diesen Werth in eine der gegebenen Gleichungen, so hat man:

$$ax + \frac{bmc - ban}{bc - ad} = m$$

$$x = \frac{m - \frac{bmc - ban}{bc - ad}}{a} = \frac{bn - dm}{bc - ad}$$

Man kann aber auch die ersten Gleichungen so verbinden, daß y herausfällt:

$$adx + bdy = dm$$
$$cbx + bdy = bn$$
$$(ad - cb)\,x = dm - bn$$
$$x = \frac{dm - bn}{ad - cb}$$

Dieser Werth ist von dem eben in (I.) gefundenen nur scheinbar verschieden. Denn da $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ (nach 155, 6), so ist

$$\frac{dm - bn}{ad - cb} = \frac{bn - dm}{bc - ad}$$

Und aus gleichem Grunde sind die für beide unbekannte Zahlen hier angegebenen Werthe dieselben, wie die durch Substitution gefundenen.

285) Auflösungsart durch doppelte Werthbestimmung der einen unbekannten Zahl.

Regel. 1) Suche den Werth derselben unbekannten Zahl aus jeder der beiden Gleichungen, so sind

2) diese Werthe einander gleich und bilden somit eine Gleichung, worin nur mehr eine unbekannte Zahl enthalten ist;

3) diese löse auf, so ist die eine unbekannte Zahl gefunden;

4) die andere findet man entweder durch Substitution, oder auf dieselbe Weise.

Ist I) $ax + by = m$
II) $cx + dy = n$

so hat man aus I) $x = \frac{m - by}{a}$

aus II) $x = \frac{n - dy}{c}$

also $\frac{m - by}{a} = \frac{n - dy}{c}$

Also $mc - bcy = an - ady$

$mc - an = (bc - ad)\,y$

$$y = \frac{mc - an}{bc - ad}$$

Eben so hat man:

$$y = \frac{m - ax}{b} = \frac{n - cx}{d}$$

Also $md - adx = nb - cbx$

$md - nb = (ad - cb)\,x$

$$x = \frac{md - nb}{ad - bc}$$

286) IV. Auflösungsart (nach Bezout).

Regel: 1) Multiplicire die eine der Gleichungen mit einer unbestimmten Zahl A;

2) verbinde beide Gleichungen durch Addition oder Subtraction ihrer beiden Seiten, so enthält die neue Gleichung zwar beide unbekannte Zahlen; aber mit einer unbestimmten Summe multiplicirt. Soll also eine der unbekannten Zahlen herausgeschafft werden, so braucht sein Factor nur gleich 0 zu werden. Diesen Werth kann er aber erhalten, da A unbestimmt ist.

3) Schafft man also auf diese Art zuerst die eine, dann die andere unbekannte Zahl aus der Gleichung, welche beide enthält, weg, so kann man beide nach einander finden.

Beispiele:

Ist gegeben: I) $ax + by = m$

II) $cx + dy = n$

so mache aus II)

III) $Acx + Ady = nA$

und verbinde III. mit I. zu:

IV) $(Ac + a)\,x + (Ad + b)\,y = nA + m$

Setze $Ac + a = 0$, so ist $A = -\frac{a}{c}$

Dieser Werth von A in IV. gesetzt, gibt:

$$\left(-\frac{a}{c} \cdot c + a\right)x + \left(-\frac{a}{c}d + b\right)y = -\frac{na}{c} + m$$

oder $\frac{bc - ad}{c}\,y = \frac{mc - na}{c}$

also $y = \frac{mc - na}{bc - ad}$ wie oben.

Setzt man $Ad + b = 0$, so kommt $A = -\frac{b}{d}$

Dieß in IV. gesetzt, gibt:

$$\left(-\frac{b}{d}c + a\right)x + \left(-\frac{b}{d}d + b\right)y = -\frac{nb}{d} + m$$

folglich $\frac{ad - bc}{d} \cdot x = \frac{md - nb}{d}$

also $x = \frac{md - nb}{ad - bc}$

287) Beispiel in bestimmten Zahlen nach allen vier Auflösungsarten gelöst:

$$5x + 7y = 29$$
$$9x + 2y = 31$$

I.

$x = \frac{29 - 7y}{5}$

$\frac{9(29 - 7y)}{55} + 2y = 31$

$261 - 63y + 10y = 155$

$261 - 155 = 53y$

$2 = \frac{106}{53} = y$

also $5 \cdot x + 7 \cdot 2 = 29$

$x = \frac{29 - 14}{5} = 3$

II.

$45x + 63y = 261$

$45x + 10y = 155$

$53y = 106$

$y = \frac{106}{53} = 2$

$10x + 14y = 58$

$63z + 14y = 217$

$53x = 159$

$x = \frac{159}{53} = 3$

III.

$x = \frac{29 - 7y}{5}$

$x = \frac{31 - 2y}{9}$

$\frac{29 - 7y}{5} = \frac{31 - 2y}{9}$

$261 - 63y = 155 - 10y$

$106 = 53y$

$2 = y$

$y = \frac{29 - 5x}{7}$

$y = \frac{31 - 9x}{2}$

$\frac{29 - 5x}{7} = \frac{31 - 9x}{2}$

$58 - 10x = 217 - 63x$

$53x = 159$

$x = 3$

IV.

$5x + 7y = 29$

$A9x + A2y = A31$

$(A \cdot 9 - 5)x + (A \cdot 2 - 7)y = A \cdot 31 - 29$

Ist $9A - 5 = 0$

so ist $A = \frac{5}{9}$. Also:

$(\frac{5}{9} \cdot 9 - 5)x + (\frac{5}{9} \cdot 2 - 7)y = \frac{5}{9} \cdot 31 - 29$

$-\frac{53}{9}y = \frac{155 - 261}{9}$

oder $53y = 261 + 155$

$= \frac{106}{53} = 2$

Ist $2A - 7 = 0$

oder $A = \frac{7}{2}$, so ist

$(\frac{7}{2} \cdot 9 - 5)x + (\frac{7}{2} \cdot 2 - 7)y = \frac{7}{2} \cdot 31 - 29$

$\frac{53}{2}x = \frac{159}{2}$

$x = \frac{159}{53} = 3$

288) Anmerkungen. 1) Daß man, wenn einmal eine der beiden Unbekannten in Zahlen gegeben ist, durch Substitution meist leichter die andere findet, fällt in die Augen.

2) Welche der Auflösungsarten jedesmal am vortheilhaftesten angewendet werden, ist aus den Gleichungen selbst zu beurtheilen.

3) Vor der Auflösung muß man übrigens jeder Gleichung immer erst die Form geben:

$$ax + bx = m$$

was geschehen kann. Denn hat man:

$$5\tfrac{1}{2}x - 7\tfrac{1}{3}y - 29 = 3\tfrac{1}{5}x + (5 - x)\,9$$

so ist $(5\tfrac{1}{2} - 3\tfrac{1}{5} + 9)\,x - 7\tfrac{1}{3}y = 45 + 29$

oder $11\tfrac{3}{10}x - 7\tfrac{1}{3}y = 74.$

4) Haben die unbekannten Zahlen gebrochene Factoren, so kann man zuerst die sämmtlichen Divisoren wegschaffen.

Z. B. Aus $5\tfrac{1}{3}x - 1\tfrac{1}{4}y = 11$

$$7x - 4\tfrac{1}{2}y = 3$$

folgt $64x - 15y = 132$

$$14x - 9y = 6.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit 3, die andere mit 5, so erhält y gleiche Coefficienten:

$$192x - 45y = 396$$

$$70x - 45y = 30$$

Zieht man hier, damit y wegfällt, die beiden Seiten der untern Gleichung von beiden Seiten der obern ab, so kommt:

$$122x = 366$$

$$x = 3.$$

Dieß in eine der gegebenen Gleichungen, z. B. in die erste, substituirt, gibt:

$$5\tfrac{1}{3} \cdot 3 - 1\tfrac{1}{4}y = 11$$

$$16 - 11 = 1\tfrac{1}{4}y$$

$$5 = \tfrac{5}{4}y$$

$$y = 5 \cdot \tfrac{4}{5} = 4$$

5) Steht die unbekannte Zahl im Nenner, so ist es oft vortheilhaft, erst eine der Zahlen ganz wegzuschaffen, ehe man mit diesen Nennern multiplicirt (267. IV.).

Beispiele:

I) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m$

II) $\frac{c}{x} + \frac{d}{y} = n$

I. mit c mult. III) $\frac{ac}{x} + \frac{bc}{y} = mc$

II. mit a mult. IV) $\frac{ac}{x} + \frac{ad}{y} = an$

III. und IV. verbunden $\frac{bc}{y} - \frac{ad}{y} = mc - an$

$bc - ad = (mc - an)\,y$

also $\frac{bc - ad}{mc - an} = y$

$$\frac{a}{x} = m - \frac{b\,(mc - an)}{bc - ad} = \frac{mbc - mad - bmc + ban}{bc - ad}$$

$$= \frac{abn - amd}{bc - ad}$$

$$x = \frac{bc - ad}{bn - md}$$

Zur Uebung:

1) $7x + \frac{5}{2}y = 411\frac{1}{2}$
$39x - 14y = -935\frac{9}{10}$
A. $x = 17\frac{1}{2}$, $y = 115\frac{3}{5}$

2) $5\frac{3}{4}y - 11x = 4y + 117\frac{1}{8}$
$8x + 175 = 2y$
A. $x = 9$, $y = 123\frac{1}{2}$

3) $x + y = a$
$x - y = b$
A. $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$

4) $\frac{10}{x} + \frac{12}{y} = 4$
$\frac{50}{x} - \frac{18}{y} = 7$
A. $x = 5$, $y = 6$

289) II. Auflösung von Gleichungen mit drei und mehr unbekannten Zahlen.

Ist I) $ax + by + cz = m$
$dx + ey + fz = n$
$gx + hy + kz = p$

so hat man folgende Auflösungsarten:

1) Durch Substitution:

Aus I) folgt $x = \frac{m - by - cz}{a}$

Dieß in II. und III. gesetzt, gibt:

IV) $\frac{d\,(m - by - cz)}{a} + ey + fz = n$

V) $\frac{g\,(m - by - cz)}{a} + hy + kz = p$

Aus IV. folgt $y = \frac{an - dm + z(ed - af)}{ae - bd}$

Dieß in V. gesetzt, gibt:

$$z = \frac{(ap - gm)(ae - bd)(ah - bg)(an - dm)}{(cd - af)(ah - gb) + (ak - gc)(ae - bd)}$$

$$= \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

Eben so findet man:

$$y = \frac{akn - afp + dcp - dkm + gfm - gcn}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

$$x = \frac{bfp - bkn + ekm - ecp + hcn - hfm}{aek - ahf + dhc - dbk + gpf - gec}$$

2. Auflösung. Durch Addition und Subtraction.

1) Durch Verbindung von I. und II. schafft man nach (284. II.) x weg und eben so aus II. und III. oder I. und III., so erhält man zwei neue Gleichungen, die nur mehr zwei Unbekannte enthalten, z und y. Diese verbinde wieder so, daß y wegfällt, so hat man eine Gleichung mit einer Unbekannten z, die man also finden kann.

2) Eben so findet man y und x.

Auflösung 3. Durch Gleichsetzung.

Suche aus I. II. und III. den Werth einer und derselben Unbekannten, z. B. x, setze diese Werthe einander gleich, so erhält man zwei Gleichungen, worin nur mehr die beiden Unbekannten y und z vorkommen. Aus jeder von diesen bestimmt man y, setzt die gefundenen Werthe abermals einander gleich, so hat man eine Gleichung mit einer Unbekannten z, das sich also durch bekannte Zahlen finden läßt (285).

Eben so verfährt man bei y und z.

Auflösung 4.

Regel. Multiplicire zwei der gegebenen Gleichungen mit unbestimmten Zahlen; verbinde alle drei durch Addition oder Subtraction ihrer beiden Seiten, so entsteht eine Gleichung, in welcher jede Unbekannte mit einem zusammengesetzten Factor multiplicirt vorkommt. Setze zwei dieser Factoren $= 0$, was man thun darf, da sie unbestimmte Glieder enthalten, so fallen zwei Unbekannte weg und die dritte ist leicht zu finden. Beispiel:

$$\text{I)}\ ax + by + cz = m$$
$$\text{II)}\ dx + ey + fz = n$$
$$\text{III)}\ gx + hy + kz = p$$

II. mit A mult. $Adx + Aey + Afz = An$

III. mit B mult. $Bgx + Bhy + Bkz = Bp$

Diese beiden Gleichungen mit I. verbunden

$$(a+Ad+Bg)x + (b+Ae+Bh)y + (c+Af+Bk)z = m + An + Bp$$

Ist nun hier $a + Ad + Bg = 0$

und $b + Ae + Bh = 0$

so erhält man durch Auflösung dieser beiden Gleichungen

$$A = \frac{bg - ah}{hd - eg}, \quad B = \frac{ae - bd}{hd - ge}$$

Setzt man dieß in die zusammengesetzte Gleichung, so fällt sowohl x als y weg, weil ihre Factoren 0 werden und man erhält:

$$z\left(c + \frac{bg - ah}{hd - ge} \cdot f + \frac{ae - bd}{hd - ge} \cdot k\right) = m + n \cdot \frac{bg - ah}{hd - eg} + p \cdot \frac{ae - bd}{hd - ge}$$

und hieraus folgt unmittelbar, wie oben:

$$z = \frac{mhd - meg + nbg - nah + pae - pbd}{chd - ecg + fbg - fah + kae + kbd}$$

Auf dieselbe Weise lassen sich aus der zusammengesetzten Gleichung y und x finden.

290) Anmerkungen. 1) Wie zu verfahren ist, wenn man mehr unbekannte Zahlen, somit auch mehr als 3 Gleichungen hat, läßt sich hieraus leicht abnehmen. Man sucht nämlich nach irgend einer der angegebenen Methoden eine Gleichung zu erhalten, die nur mehr eine unbekannte Zahl enthält. Diese läßt sich dann immer finden. Die übrigen sucht man entweder durch Substitution oder auf demselben Wege, wie die erste.

2) Enthält nicht jede Gleichung so viel Unbekannte, als in der Aufgabe vorkommen, so läßt sich der angegebene Weg meist abkürzen.

Z. B. $\text{I)}\ ax + by = m$

$\text{II)}\ cx + dz = n$

$\text{III)}\ ey + fz = p$

Aus I. und II. folgt IV. $bcy - daz = mc - an$

Verbindet man III. und IV. so ist

$$bcey - daez = emc - ean$$
$$bcey + bcfz = bcp$$

$$z = \frac{ean - emc + bcp}{dae + bcf}$$

Eben so $y = \frac{dap + mcf - anf}{dae + bcf}$

$x = \frac{mde - bdp + bnf}{dae + bcf}$

Beispiele:

1) $x + y = a$
$x + z = b$
$y + z = c$

$x = \frac{a + b - c}{2}$

$y = \frac{a - b + c}{2}$

$z = \frac{-a + b + c}{2}$

2) $3x + 5y = 161$
$7x + 2z = 209$
$2y + z = 89$

$x = 17$
$y = 22$
$z = 45$

3) $2x + 3y + 4z = 47$
$5x + 7y + 8z = 103$
$9x + 10y + 11z = 152$

$x = 4,\ y = 5,\ z = 6$

4) $2x + 5y - 7z = -288$
$5x - y + 3z = 227$
$7x + 6y + z = 297$

$x = 13,\ y = 24,\ z = 62$

5) $\frac{1}{2}x = 41 - y$
$\frac{1}{4}z = 20\frac{1}{2} - x$
$\frac{1}{5}z = 34 - y$

$x = 18,\ y = 32,\ z = 10$

6) $x + y + z = 1\frac{1}{12}$
$x + y - z = \frac{7}{12}$
$x - y + z = \frac{5}{12}$

$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3},\ z = \frac{1}{4}$

3) Kommt die unbekannte Zahl allein als Nenner vor, so läßt sich die Aufgabe so lösen, daß man die ganzen Brüche wegschafft, worin jede Unbekannte enthalten ist, wie oben bei zwei Unbekannten geschehen ist. Z. B.

I) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m$

II) $\frac{c}{x} + \frac{d}{z} = n$

III) $\frac{e}{y} + \frac{f}{z} = p$

Hier ist aus I. und II.

$\frac{ac}{x} + \frac{bc}{y} = mc$

$\frac{ac}{x} + \frac{ad}{z} = na$

also IV) $\frac{bc}{y} - \frac{ad}{z} = mc - na$

Verbindet man III. und IV. so kommt:

$\frac{bce}{y} - \frac{ade}{z} = mce - nae$

$\frac{bce}{y} + \frac{bcf}{z} = bcp$

und hieraus $\frac{bcf + ade}{bcp - mce + nae} = z$

Auf ähnliche Weise findet man die übrigen Unbekannten.

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b$

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$

$x' = \frac{2}{a + b - c}$

$y = \frac{2}{a - b +}$

$z = \frac{2}{-a + b + c}$

2) $-\frac{50}{x} + \frac{70}{y} + \frac{90}{z} = 10$

$\frac{40}{x} + \frac{30}{y} + \frac{20}{z} = 12$

$\frac{30}{x} - \frac{20}{y} + \frac{40}{z} = 13$

§. 2.

Uebungsaufgaben mit zwei und mehr unbekannten Zahlen.

291) Vorbemerkung. Es ist nicht immer nöthig, eine Aufgabe, die zwei unbekannte Größen enthält, als solche zu behandeln. Oft ist die eine Gleichung so einfach, daß sie sogleich gelöst werden kann; wodurch also bei der schriftlichen Rechnung blos noch eine Gleichung mit einer unbekannten Zahl aufzulösen ist. Z. B.

A und B haben zusammen 100 fl., B hat $\frac{2}{7}$ mal so viel als A. Dieß gibt eigentlich:

$$x + y = 100$$
$$x = \frac{2}{7} y$$

Allein da sogleich in die Augen fällt, daß also 100 aus $\frac{7}{2} y$ und y besteht, so ist bloß anzusetzen:

$$\frac{7}{2} y + y = 100$$

1) Ein Maurer arbeitet mit 17 Personen an einem Bau; er zahlt am Ende der Woche $10\frac{1}{2}$ fl. Lohn; jedem Gesellen täglich 40 kr., jedem Handlanger täglich 30 kr. Wie viel Gesellen und Handlanger waren es? A. 10 G. 7 H.

2) Jemand hat zwei Münzsorten; von der ersten gelten 5 Stück, von der andern 20 Stück 1 fl. Wenn nun im Ganzen 70 Stück in 5 fl. verlangt, wie viel von jeder Sorte gebührt dem? A. 10 und 60.

3) Ein Wirth will zwei Weinsorten, von welchen die erste die Maß zu 36 kr., die zweite zu 48 verkauft wird, so mischen, daß er die Maß zu 40 kr. geben kann, wie viel Maß jeder Sorte muß er zu 20 Maß nehmen? A. $x = 13\frac{1}{3}$, $y = 6\frac{2}{3}$.

4) Ein Goldarbeiter hat 14 löthiges und 11 löthiges Silber; er will 7 Mark 13 löthiges durch Zusammenschmelzung beider Sorten erzeugen, wie viel von jeder muß er nehmen? A. $4\frac{2}{3}$ und $2\frac{1}{3}$.

5) Gold verliert im Wasser $\frac{1}{18}$, Silber $\frac{1}{11}$ des Gewichts. Wenn nun ein Gemisch von 67 Loth Gold und Silber 5 Loth verlor, wie viel Gold und Silber enthält es? A. Gold $30\frac{6}{7}$, Silber $36\frac{1}{7}$.

6) Allgemein. Zwei Zahlen machen zusammen a, die erste m mal, die zweite n mal genommen und addirt geben b, welches sind diese Zahlen? $x = \frac{ma - b}{m - n}$, $y = \frac{b - na}{m - n}$

7) Von zwei Kanonieren hat der eine schon a mal geschossen, ehe der zweite anfängt, und schießt nun b mal in m Sekunden; der zweite c mal in n Sekunden. Dabei braucht der erste zu p Schüssen r Pfd. Pulver, der andere zu q Schüssen s Pfd. Wie viel Schüsse wird der zweite machen müssen, bis er so viel Pulver verbraucht, als der erste?

Erläuterung. Zeit des gemeinschaftlichen Schießens $= x$ Anzahl der Schüsse des 2ten y, so ist: Anzahl der Schüsse des ersten in 1 Sek. $\frac{b}{m}$; folglich in x Sek. $x \cdot \frac{b}{m}$, also im Ganzen $a + x\frac{b}{m}$; Pulververbrauch desselben: $\left(a + x\frac{b}{m}\right)\frac{r}{p}$.

Anzahl der Schüsse des zweiten in 1 Sek. $\frac{c}{n}$, also in x Sekunden $x \cdot \frac{c}{n}$, also ist $y = x \cdot \frac{c}{n}$. Dessen Pulververbrauch ist also $x \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{s}{q}$ folglich $\left(a + x\frac{b}{m}\right)\frac{r}{p} = x \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{s}{q}$.

8) Aus zwei Röhren wird ein Gefäß gefüllt, das 3870 Maß hält, wenn die erste 12, die andere 18 Stunden fließt. Läßt man die erste Röhre 15, die andere 7 Stunden laufen, so geben sie 2745 Maß. Wie viel Maß gibt jede Röhre in 1 Stunde oder wie verhält sich die Menge des Wassers, das sie geben? A. die erste 120, die andere 135.

9) 15 Schlesische Ellen und 33 Leipziger machen zusammen so viel als $39\frac{1}{2}$ Brabanter; 24 Schlesische und 55 Leipziger so viel als 65 Bra-

banter. Wie verhält sich die Schlesische und Leipziger Elle zur Brabanter? A. S : B = 5 : 6, L. : B. = 9 : 11.

10) Zwei Kaufleute A und B legen ein Kapital zusammen und zwar A um a fl. mehr als B; und m Monat früher. Nach n Monaten gewinnen sie, so daß A vom Gewinn p fl., B q fl. erhält. Wie viel hat jeder eingelegt?

Erläuterung. Ist x die Einlage von B, so ist x + a die Einlage von A. Da sich nun die Einlagen, multiplicirt mit der Zeit, wie die Gewinnste verhalten, so ist $(x + a)(m + n) : xn = p : q$

Welche Aenderung ist in dieser Formel vorzunehmen, wenn A sein Geld um m später einlegt?

11) Salpeter und Schwefel sind zu einer Masse von 100 Pfund vermischt und zwar so, daß 3 Theile Schwefel auf 7 Theile Salpeter kommen. Wie viel Salpeter muß man der Masse zusetzen, wenn das Verhältniß von Schwefel zu Salpeter wie 4 zu 11 wird? A. $12\frac{1}{2}$ Pfund. Dagegen müßte man vom Schwefel wegnehmen: $4\frac{6}{11}$ Pfund.

Soll das Gewicht 100 Pfund bleiben, so müßte man vom Schwefel wegnehmen $3\frac{1}{8}$ Pfund und eben so viel dem Salpeter zusetzen.

12) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe sich zu ihrer Differenz wie m zu n, deren Product sich zur Summe, wie p zu q verhält?

Die eine ist $\frac{2mp}{q(m+n)}$, die andere $\frac{2mp}{q(m-n)}$

13) Die Summe zweier Zahlen sei 22, die Differenz ihrer Quadrate 44; welches sind diese Zahlen? A. 10, 12.

Diese Aufgabe allgemein zu lösen.

14) Es werden drei Zahlen gesucht so beschaffen, daß 4 von der ersten abgezogen und zur zweiten hinzugesetzt, das Verhältniß des Rests zur Summe wie 1 zu 2 giebt. Von der zweiten 10 abgezogen und zu der dritten 10 addirt, giebt das Verhältniß 3 zu 10. Von der ersten 5 abgezogen und zur dritten 5 hinzugefügt, giebt das Verhältniß 3 zu 11. Welche Zahlen sind es? A. 20, 28, 50.

15) Jemand hat drei Stücke Silber von ungleichem Gehalt 15, 10, 9 löthiges. Schmelzt er das 15 und 10 löthige zusammen, so entsteht $11\frac{2}{3}$ löthiges; gleichfeines entsteht, wenn er das 15 und 9 löthige zusammenschmelzt. Wenn nun alle 3 Stücke 34 Mark schwer sind, wie viel wiegt jedes Stück?

Für den Ansatz ist zu bemerken, daß die Menge Feinsilber in den einzelnen Massen gleich ist der im Gemisch beider. Also hat man:

$$x + y + z = 34$$
$$x.15 + y.10 = 11\tfrac{2}{3}(x + y)$$
$$x.15 + z.9 = 11\tfrac{2}{3}(x + z)$$

16) Jemand bezahlt a fl. mit drei Sorten Goldmünzen, m von der ersten, n von der zweiten, p von der dritten Art; a' fl. mit m' von der ersten, n' von der zweiten, p' von der dritten Art; a'' fl. mit m'' von der ersten, n'' von der zweiten, p'' von der dritten Art: was ist der Werth jeder Goldmünze? Aufl. unter den allgemeinen Beispielen.

17) Drei Arbeiter A, B, C fertigen ein Werk. A und B brauchen gemeinschaftlich 12 Tage, B und C 20 Tage, A und C 15 Tage: wie lang braucht jeder einzeln; wie viel alle zugleich?

Nennt man die Zahlen, die angeben, den wievielsten Theil des Werks A, B, C in einem Tage machen x, y, z, so ist, da A und B zusammen $\frac{1}{12}$, B und C $\frac{1}{20}$, A und C $\frac{1}{15}$ des Werks täglich fertigen, der Ansatz leicht zu finden.

18) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren, A, B, C gefüllt werden; A und B füllen ihn in 60 Minuten, A und C in 70, B und C in 80. Wie lang braucht jede einzeln; wie lang alle zugleich? (Ganz ähnlich der vorigen Aufgabe).

19) Jemand hat drei Stücke Metall, jedes aus Gold, Silber, Kupfer bestehend. Das erste enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber, 30 Loth Kupfer; das zweite 20 L. G., 28 L. S., 48 L. K.; das dritte 12 L. G., 39 L. S., 24 L. K. Wie viel wird er von jeder Masse nehmen müssen, um durch Zusammenschmelzung eine Composition von 10 Loth Gold, 23 Loth Silber und 26 Loth Kupfer zu erhalten?

Erläuterung. Man frage zuerst nach dem Theil, den er von jeder Masse nimmt und berechne erst daraus das Gewicht. Ist dieser Theil beim ersten Stück $\frac{1}{x}$, beim zweiten $\frac{1}{y}$, beim dritten $\frac{1}{z}$, so erhält man aus dem ersten Stück $\frac{5}{x}$ L. Gold, $\frac{15}{x}$ L. Silber, $\frac{30}{x}$ L. Kupfer in die Mischung; aus dem zweiten $\frac{20}{y}$ G. $\frac{28}{y}$ S., $\frac{48}{y}$ K.; aus dem dritten $\frac{12}{z}$ G., $\frac{39}{z}$ S., $\frac{24}{z}$ K. Folglich

beträgt alles Gold, das in die Mischung kommt, $\frac{5}{x}+\frac{20}{y}+\frac{12}{z}$ und da es 10 L. wiegen soll, hat man $\frac{5}{x}+\frac{20}{y}+\frac{12}{z}=10$.

Eben so für das Silber im Gemisch

$$\frac{15}{x}+\frac{28}{y}+\frac{39}{z}=23$$

Und für das Kupfer im Gemisch

$$\frac{30}{x}+\frac{48}{y}+\frac{24}{z}=26$$

Aus x, y, z berechnet man dann erst den Gewichtsbetrag jedes Antheils.

20) Drei Zahlen sind so beschaffen, daß die erste vermehrt um die doppelte Summe der zweiten und dritten a ist; die zweite vermehrt um die dreifache Summe der ersten und dritten sei b; die dritte mehr der vierfachen Summe der ersten und zweiten sei c. Welches sind diese Zahlen?

Bemerkung. Man erleichtert sich die Auflösung, wenn man $x+y+z=S$ setzt und nun die Summe der ersten und zweiten durch $S-z$, der zweiten und dritten durch $S-x$, der ersten und dritten durch $S-y$ bezeichnet. Dann kommt $S=\frac{6a+3b+2c}{23}$ woraus die drei Größen leicht zu finden.

21) Aehnlich ist folgende Aufgabe:

$$(x+y)-z=a$$
$$2(x+z)-y=b$$
$$3(y+z)-x=c$$

Bei obiger Behandlung hat man

$$S=\frac{6a+4b+3c}{11}$$

22) Das Vermögen von A und die Hälfte des Vermögens von B machen 7000 fl.; das Vermögen von B und ein Drittel des Vermögens von C machen 5000 fl.; das Vermögen von C und ein Viertel des Vermögens von A machen 6000 fl.: was hat Jeder? A. A hat 5280, B 3440, C 4680 fl.

23) Es sei ein Rechteck gegeben; welches ist die Seite des Quadrats, dessen Umfang sich zu dem Umfang des Rechtecks verhält, wie die Fläche des Quadrats zur Fläche des Rechtecks.

Aufl. Sind a und b die Seiten des Rechtecks, so ist der Inhalt a.b, der Umfang 2(a + b). Es sei x die Seite des Quadrats, so ist dessen Fläche xx, Umfang 4x. Es ist also:

$$4x : 2(a + b) = xx : ab$$

oder $$4 : 2(a + b) = x : ab$$

24) A, B, C haben ungleich viel. Giebt A dem B und C so viel als jeder hat; darauf B dem A und C so viel als jeder nach der ersten Theilung besaß; dann C dem A und B so viel als jeder nach der zweiten Theilung hatte, so besitzen sie gleichviel; wie viel hatte Jeder Anfangs, wenn sie zusammen 96 fl. besaßen?

Vierter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen.

§. 1.

Reine quadratische Gleichungen und Aufgaben.

292) Kommt die unbekannte Zahl mit sich selbst multiplicirt in der Gleichung vor, so heißt die Gleichung eine quadratische, oder eine Gleichung vom zweiten Grad. Hat die Gleichung blos die Form

$$ax^2 = b$$

so ist die Gleichung eine reine quadratische Gleichung. Kommt die unbekannte Zahl aber auser der zweiten auch in der ersten Potenz in ihr vor, so heißt sie unreine quadratische Gleichung. Ihre Form ist

$$x^2 + ax = b$$

293) Aus (261. Beisp. 11) ersieht man, daß bei der reinen quadratischen Gleichung auser den bereits geläufigen Sätzen nur noch der angewendet wird: die gleichvielste Wurzel aus gleichen Zahlen ist gleich. Allgemein hat man also die Auflösung:

$$ax^2 = b \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{12} = 48$$

$$x^2 = \frac{b}{a} \qquad x^2 = 12 \cdot 48 = 576$$

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}} \qquad x = \sqrt{576} = 24$$

wobei es also nur darauf ankommt, die Gleichung so umzuformen, daß man am Ende $x^2 = b$ hat.

Anmerk. Man hat oben (233) gesehen, daß $\sqrt{a}$ dasselbe Quadrat a giebt, sie mag + oder − vor sich haben, oder daß $(+\sqrt{a})(+\sqrt{a}) = (-\sqrt{a})(-\sqrt{a}) = a$. Welcher von beiden Werthen der richtige sei, muß aus der Aufgabe beurtheilt werden. Diese in der allgemeinen Betrachtung liegende Unbestimmtheit deutet man dadurch an, daß man dem Werth der Unbekannten beide Zeichen vorsetzt $\pm$, was indeß nicht so verstanden werden darf, als ob beide Werthe zugleich richtig seien, sondern nur so, daß es aus der Beschaffenheit der Größen, welche die Aufgabe angiebt, entnommen werden muß, welches Zeichen zu setzen sei. In obiger Aufgabe hat z. B. — 24 keine Bedeutung, da man nach einer Zahl fragt ohne weitere Bestimmung. In dem allgemeinen Beispiel schreibt man aber auch:

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ d. h. } x = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ und } x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Beispiele:

1) $5x^2 + 5\frac{5}{9} = 7x^2$

$\frac{50}{9} = 2x^2$

$\frac{25}{9} = x^2$

$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = x$

2) $ax^2 + by^2 = c$

$dx^2 + ey^2 = f$

$$x = \pm\sqrt{\frac{ec - bf}{ae - db}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{af - dc}{ae - db}}$$

294) Aufgaben.

1) Die Länge eines Rechtecks ist das Doppelte seiner Breite; sein Flächeninhalt 50 Q. Fuß. Welches sind die Seiten? A. 10 F., 5 F.

2) Zwei Zahlen zu finden, deren eine das Vierfache der andern, die Differenz ihrer Quadrate 240 sei. Die Zahlen sind 4 und 16.

Diese Aufgabe allgemein: Zwei Zahlen verhalten sich wie m zu n und die Differenz ihrer Quadrate sei q. Die Zahlen sind

$$m\sqrt{\frac{q}{m^2 - n^2}}, \quad n\sqrt{\frac{q}{m^2 - n^2}}$$

Anmerk. Hier muß $m > n$ sein, wenn die Formel einen denkbaren Werth geben soll. Denn ist $m = n$, so muß $q = o$ sein; ist $m < n$, so ist $\frac{q}{m^2 - n^2}$ negativ oder gleich $-\frac{q}{n^2 - m^2}$ also $m\sqrt{-\frac{q}{n^2 - m^2}}$ eine imaginäre Form (233). Diese

leistet zwar der Gleichung Genüge, hat aber für sich allein genommen, keine denkbare Zahlen-Bedeutung. Es ist nämlich

$$m^2 \cdot \left(-\frac{q}{n^2-m^2}\right) - n^2\left(-\frac{q}{n^2-m^2}\right) = -\frac{m^2q}{n^2-m^2} + \frac{n^2q}{n^2-m^2}$$

$$= \frac{(n^2-m^2)\,q}{n^2-m^2} = q,$$ wie verlangt wird und beide Formen verhalten sich, wie m zu n.

3) Zwei Zahlen zu finden, die sich wie m zu n verhalten und deren Summe der Quadrate q ist. Sie sind:

$$m \cdot \sqrt{\frac{q}{m^2+n^2}} \quad \text{und} \quad n\sqrt{\frac{q}{m^2+n^2}}$$

4) Drei Zahlen zu finden, deren Producte zu zweien bekannt sind. Z. B. die erste mit der zweiten multiplicirt, gibt m, die erste mit der dritten multiplicirt, gibt n, die zweite mit der dritten multiplicirt gibt p. Sie sind: $\sqrt{\frac{mn}{p}}, \sqrt{\frac{pm}{n}}, \sqrt{\frac{pn}{m}}$

Eben so für 5 Zahlen.

5) Drei Zahlen zu finden, von welchen das Product einer jeden in die Summe der zwei andern bekannt ist.

Aufl. $x(y+z) = m$

$y(x+z) = n$

$z(x+y) = p$

Durch Verbindung aller drei Gleichungen, kommt

$$xy+xz+yz = \frac{m+n+p}{2}$$

Davon jede der drei Gleichungen abgezogen, gibt

$$xy = \frac{m+n-p}{2}$$

$$xz = \frac{m-n+p}{2}$$

$$yz = \frac{-m+n+p}{2}$$

woraus wie in A. 4, x, y, z zu finden ist.

6) Jemand stiftet eine Geldaustheilung unter m Arme. Es melden sich so viele, daß jeder nur a fl. erhielte; wollte man jedem so viel geben, als einer der m erhalten hätte, so wären b fl. erforderlich. Wie groß war der Antheil eines der m Armen; wie viele meldeten sich?

Der Antheil eines der m Armen war $\sqrt{\frac{ba}{m}}$, es meldeten sich $\sqrt{\frac{bm}{a}}$

§. 2.

unreine quadratische Aufgaben.

295) Es ist $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ d. h. das Quadrat jedes zweitheiligen Ausdrucks ist ein dreitheiliger Ausdruck, dessen erster Theil das Quadrat der ersten Zahl, der zweite das doppelte Product der ersten und zweiten, der dritte das Quadrat der zweiten Zahl ist. Ein zweitheiliger Ausdruck z. B. $a^2 \pm 2ab$ ist daher nie ein vollständiges Quadrat einer zweitheiligen Wurzel.

Bedenkt man aber, daß das zweite Glied der Wurzel $a + b$, oder b, herauskommt, wenn man das zweite Glied der Potenz, oder 2ab, durch die doppelte Wurzel des ersten Gliedes der Potenz, oder 2a, dividirt, nämlich $\frac{2ab}{2a} = b$, so hat man ein Mittel, für jeden zweitheiligen Ausdruck das dritte Glied zu finden, welches hinzugefügt ihn zu einem vollständigen Quadrat einer zweitheiligen Wurzel macht. Das Zeichen des zweiten Gliedes der Wurzel richtet sich nach dem Zeichen des zweiten Gliedes der Potenz. Ist dieses $\pm$, so ist es auch $\pm$. Man nennt dieses dritte Glied die quadratische Ergänzung.

Beispiele:

Ausdrücke.	Ergänzung.	Wurzel.
$a^2 + b$	$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	$a + \frac{b}{2a}$
$a^2 - \frac{ab}{2}$	$\left(\frac{b}{4}\right)^2$	$a - \frac{b}{4}$
$a^2 + 4a$	$\left(\frac{4a}{2a}\right)^2 = 2^2$	$a + 2$
$a^2 - \frac{5}{8}$	$\left(\frac{5}{16a}\right)^2$	$a - \frac{5}{16a}$
$a + 2$	$\left(\frac{2}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{a}$	$a + \frac{1}{\sqrt{a}}$

296) Hat man also die unreine quadratische Gleichung

$$x^2 + 2ax = b$$

so ist hier der Ausdruck, worin x vorkommt, kein vollständiges Quadrat einer zweitheiligen Wurzel, dessen eines Glied x wäre. Sucht man also die quadratische Ergänzung für $x^2 + 2ax$

und fügt ſie auf beiden Seiten der Gleichung hinzu, ſo kommt wieder eine Gleichung, welche auf der einen Seite ein vollſtändiges Quadrat einer zweitheiligen Größe, auf der andern eine Verbindung bekannter Zahlen iſt, nämlich:

$$x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$$

$$\text{oder } (x + a)^2 = b + a^2$$

Hier auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, gibt: $x + a = \pm \sqrt{b + a^2}$

Auf beiden Seiten a ſubtrahirt:

$$x = -a \pm \sqrt{b + a^2}$$

d. h. entweder $x = -a + \sqrt{b + a^2}$

$$\text{oder } x = -a - \sqrt{b + a^2}$$

Probe:

$$(-a + \sqrt{b + a^2})^2 + 2a(-a + \sqrt{b + a^2}) = b$$

weil $a^2 - 2a\sqrt{b + a^2} + b + a^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{b + a^2} = b$

Eben ſo $(-a - \sqrt{b + a^2})^2 + 2a(-a - \sqrt{b + a^2}) = b$

weil $+ a^2 + 2a\sqrt{b + a^2} + b + a^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{b + a^2} = b$

297) Man hat alſo für die Auflöſung der unreinen quadratiſchen Gleichungen folgende Regel:

1) Ordne die Ausdrücke ſo, daß alle Glieder, die x^2 und x enthalten, zuſammengefaßt nur auf die eine Seite geſtellt ſind;
2) befreie x^2 von ſeinen Coefficienten;
3) ſuche die quadratiſche Ergänzung und füge ſie auf beiden Seiten der Gleichung hinzu;
4) ziehe auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus;
5) ſchaffe das mit x verbundene Glied weg.

Beiſpiele:

1) $ax^2 = bx + c$

$ax^2 - bx = c$

$x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$

$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac + b^2}{4a^2}$

$x - \frac{b}{2a} = + \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}}$

$x = + \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}}$

$= \frac{b \pm \sqrt{4ac + b^2}}{2a}$

2) $\frac{x^2}{a} + bx = c$

$x^2 + abx = ac$

$x^2 + abx + \frac{a^2b^2}{4} = ac + \frac{a^2b^2}{4}$

$(x + \frac{ab}{2})^2 = \frac{4ac + a^2b^2}{4}$

$x + \frac{ab}{2} = \pm \sqrt{\frac{4ac + a^2b^2}{4}}$

$x = \frac{-ab \pm \sqrt{4ac + a^2b^2}}{2}$

3) $x^2 + 6x = 27$

A. $x = 3, = -9$

4) $\frac{x}{x+60} = \frac{7}{3x-5}$

A. $x = 14, = -10$

5) $\frac{12}{x+1} + \frac{15}{x+2} = 6$

A. $x = 3$, oder ?

6) $(54 - x)(11 + x) = 984$

A. $x = 30$, oder ?

298) Aufgaben.

Was oben von Aufgaben des ersten Grades mit zwei Unbekannten gesagt worden ist, gilt auch für Aufgaben vom zweiten Grade. Auch hier kommt häufig der Fall vor, daß eine Aufgabe, die zwei Unbekannte enthält, durch eine Gleichung aufgelöst werden kann, wenn nämlich die eine Gleichung so einfach ist, daß sie keines Ansatzes bedarf.

1) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe $2m$, deren Summe der Quadrate $2n$ ist.

$$m \pm \sqrt{n - m^2}, \quad m \mp \sqrt{n - m^2}$$

2) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe $2m$, deren Product p ist.

$$m \pm \sqrt{m^2 - p}, \quad m \mp \sqrt{m^2 - p}$$

Anmerk. Beide Aufgaben lassen sich, wenn man $2d$ den Unterschied der Unbekannten nennt, und d sucht, auch als reine quadratische Aufgaben lösen. Es ist nämlich in 1, wenn x, y die beiden gesuchten Zahlen sind

$x + y = 2m$ oder $x = m + d$

$x - y = 2d$ $\quad y = m - d$

Daher $(m + d)^2 + (m - d)^2 = 2n$

also $m^2 + 2md + d^2 + m^2 - 2md + d^2 = 2n$

oder $2m^2 + 2d^2 = 2n$

oder $m^2 + d^2 = n$

oder $d^2 = n - m^2$

oder $d = \pm \sqrt{n - m^2}$

also $x = m + d = m \pm \sqrt{n - m^2}$

$y = m - d = m \mp \sqrt{n - m^2}$, wie angegeben worden.

3) Die zwei Zahlen 12 und 24 jede so in zwei Theile zu theilen, daß der eine Theil von 24 das Doppelte sei des einen Theils von 12, und das Product der zwei andern Theile sei 98.

5 und 7, 10 und 14.

4) Die zwei Zahlen a und b jede so in zwei Theile zu theilen, daß der eine Theil von a sich zum einen Theil von b verhält, wie a zu b; daß das Product ihrer andern Theile p sei.

$$a \mp \sqrt{\frac{ap}{b}} \text{ und } \pm \sqrt{\frac{ap}{b}}, \quad b \mp \sqrt{\frac{bp}{a}} \text{ und } \pm \sqrt{\frac{bp}{a}}$$

5) Sind die zwei Zahlen a und b so zu theilen, daß die ersten Theile sich verhalten wie m zu n und das Product der andern Theile p ist, so ist der erste Theil der Zahl $a =$

$$\frac{an + bm \pm \sqrt{4mn(p - ab) + (an + bm)^2}}{2n}$$

Erläuterung. Erster Theil von a sei x, so ist der andere a—x. Erster Theil von b sei y, so ist der andere b—y. Nun ist $x : y = m : n$ und $(a-x)(b-y) = p$.

6) Einer hat 100000 fl., die er in zwei Theilen zu verschiedenen Procenten anlegt, welche zusammen 12 Procent ausmachen. Der Jahreszins des einen Theils ist 4200 fl., des andern 2000 fl., welches sind die zwei Summen und ihre Procente?

Erläuterung. Erster Theil des Kapitals x, anderer Theil $100000 - x$. Erste Procente $\frac{y}{100}$, andere Procente $\frac{12-y}{100}$. Erster Zins $= x \cdot \frac{y}{100} = 4200$. Anderer Zins $(100000 - x) \cdot \frac{12-y}{100} = 2000$.

7) Einer kauft eine Anzahl Ellen eines Zeuchs und 12 Ellen mehr von einem andern; bezahlt für die Elle des zweiten 16 kr. mehr, als für die Elle des ersten; im Ganzen zahlt er für die erste Sorte 2 fl. 40 kr., für die zweite 12 fl. 8 kr.; wie viel Ellen hat er von beiden Sorten gekauft? Wie theuer 1 Elle?

Erläuterung. Vom ersten Zeuch kauft er x E., vom andern $12 + x$. Für den ersten zahlt er y kr., für den andern $y + 16$, also ist $x \cdot y = 160$, $(12 + x)(16 + y) = 728$.

8) Die Summe der Grundlinien zweier gleicher Rechtecke ist 100'. Wäre das erste so hoch als das zweite, so enthielte es 720 Quadratfuß, hätte das zweite die Höhe des ersten, so wäre es 320

Quadratfuß groß. Welches sind die Seiten jedes Rechtecks? 60 und 8, 40 und 12.

9) Zwei Handelsleute haben zusammen 10000 fl., jeder gewinnt jährlich im Verhältniß seines Kapitals. Ohne den Gewinn verzinslich zum Kapital zu schlagen, hat der erste am Ende des dritten Jahres im Ganzen 9900 fl., der zweite am Ende des zweiten gleichviel: welches ist Kapital und Gewinn eines Jeden?

Erläuterung. Kapital von A x, von B $= 10000 - x$. Gesammtgewinn von A $9900 - x$, jährlicher Gewinn $\frac{9900 - x}{3}$ Gesammtgewinn von B $9900 - (10000 - x) = x - 100$, jährlicher Gewinn $\frac{x - 100}{2}$. Also $3300 - \frac{1}{3}x : \frac{x}{2} - 50 = x : 10000 - x$ und hieraus $x = 4500$ fl.

10) Einen Würfel zu finden, dessen Inhalt um p zunimmt, während seine Seiten um a, b, c wachsen. A. Man hat $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + p$, woraus x^3 durch Subtraction wegfällt.

Die Seite des Würfels ist:

$$\frac{-(ab + ac + bc) \pm \sqrt{(ab + ac + bc)2 + 4(p - abc)(a + b + c)}}{2(a + b + c)}$$

11) Einer kauft 1 Ctr. für einen gewissen Preis. Beim Verkauf erlöst er 900 fl. und gewinnt dabei so viel Procent, als der zwölfte Theil des Einkaufspreises beträgt. Wie theuer hat er eingekauft? A. 600 fl.

12) Kostet eine Waare 450 fl. bei einem gewissen Preis, und erhielte man für dieses Geld, wenn das Pfund $\frac{1}{2}$ fl. wohlfeiler ist, 16 Pfund mehr; wie viel Pfund wiegt die Waare?

Erläuterung. Ist der erste Preis 1 Pfd. x fl., so wiegt die Waare $\frac{450}{x}$ Pfd.; bei $x - \frac{1}{2}$ fl. Preis eines Pfundes wiegt sie $\frac{450}{x - \frac{1}{2}}$, welches um 16 mehr ist, als $\frac{450}{x}$.

13) Zwei legen zu einem Geschäft 4000 fl. zusammen. Der Eine erhält nach 17 Monaten Kapital und Gewinn zusammen 2910 fl., der Andere nach 12 Monaten 1840 fl.: wie viel beträgt die Einlage eines Jeden?

Erläuterung. Die Gewinnste verhalten sich wie die Producte aus Einlage und Zeit.

14) Zwei treten zu einem Geschäft zusammen; der Eine legt 2000 fl. ein und läßt sie 5 Monat lang stehen; der Andere eine gewisse

Summe, so daß er nach zwei Monaten an Kapital und Gewinn zurück erhält 3150 fl. Der Gewinn beider beträgt 400 fl. Wie groß war die Einlage des zweiten und sein Gewinn und wie groß der Gewinn des Ersten? A. B legt ein 3000 fl., gewinnt 150; A gewinnt 250 fl.

15) Zwei Stücke Zeuch kosten zusammen 70 fl., das zweite Stück enthält 3 Ellen mehr, als das erste. Das zweite zum Preis des ersten gekauft, hätte 48 fl. gekostet, das erste im Preis des zweiten 25 fl.; wie viel Ellen enthält jedes Stück?

§. 3.

Ueber biquadratische Aufgaben.

299) Eine Gleichung, in welcher die unbekannte Zahl bloß in der 4ten und 2ten Potenz vorkommt, heißt eine biquadratische. Ihre allgemeine Form ist:

$$x^4 \pm 2px^2 = c$$

Setzt man hier $x^2 = y$ so hat man

$$y^2 \pm 2py = c$$

$$\text{also } y = \mp p \pm \sqrt{c + p^2}$$

$$\text{also } x = \pm\sqrt{\mp p \pm \sqrt{c + p^2}}$$

Hier hat also x sowohl für $-p$ als p vier Werthe, nämlich:

$$+\sqrt{\mp p + \sqrt{c + p^2}}, \quad +\sqrt{\mp p - \sqrt{c + p^2}}$$

$$-\sqrt{\mp p + \sqrt{c + p^2}}, \quad -\sqrt{\mp p - \sqrt{c + p^2}}$$

Beispiele:

1) Zwei Zahlen zu finden, deren Product 48, deren Quadratsumme 100 sei. A. 6 und 8.

2) Zwei Zahlen zu finden, deren Product 36, deren Differenz der Quadrate 135 sei. A. 12 und 3.

Fünfter Abschnitt.

Von den Exponentialgleichungen.

§. 1.

300) Wie die Logarithmen zur Abkürzung der Rechnung benützt werden, ist bereits oben gelehrt worden (II. Abschn. 13.).

Daß man sich ihrer bei Berechnung einer gesuchten Zahl, deren Werth sich aus einer Gleichung ergeben, vornehmlich dann bedienen kann, wenn höhere Wurzeln auszuziehen sind, bedarf demnach keiner weitern Erläuterung. So hat man z. B. aus

$$x^m = a$$

$$x = \sqrt[m]{a} \text{ oder } \log x = \frac{1}{m} \log a$$

$$\text{oder } \sqrt[m]{x} = a$$

$$x = a^m \text{ daher } \log x = m \log a$$

301) Im engern Sinne heißt man aber logarithmische oder Exponentialgleichungen diejenigen, in welchen das unbekannte Glied im Exponenten einer Potenz oder Wurzel vorkommt. Hier dient die Anwendung nicht bloß zur Abkürzung der Rechnung, sondern ohne sie wäre die Auflösung der Gleichung gar nicht möglich. Die Regel, nach welcher man verfährt, ist schon (267. VII.) gegeben. Daher hier noch einige Beispiele.

1) Ist $a^x = b$

so ist $x \log a = \log b$

also $x = \frac{\log b}{\log a}$

2) $a^{mx} \cdot b^{nx} = c$ oder $(a^m \cdot b^n)^x = c$

$$x = \frac{\log c}{\log (a^m \cdot b^n)} = \frac{\log c}{m \log a + n \log b}$$

3) $a^{mx+p} \cdot b^{nx+q} = c$

$(mx+p) \log a + (nx+q) \log b = \log c$

$$x = \frac{\log c - p \log a - q \log b}{m \log a + n \log b}$$

4) $7069^x = 353243309509$

$x = 3$

5) $2^x = 769$, $x = 9{,}5868 \ldots$

6) $\sqrt[2]{(\frac{7}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5})^{3x}} = 54783$, $x = 9{,}2723 \ldots$

7) $a^{x-1} = \frac{b(a^{x-1}+m)}{a}$

$$x = \frac{\log b + \log m - \log (a-b)}{\log a} + 1$$

8) $a^{x+y} = m$, also $(x+y) \log a = \log m$
$b^{x-y} = n$, und $(x-y) \log b = \log n$

also $x + y = \frac{\log m}{\log a}$

und $x - y = \frac{\log n}{\log b}$

und hieraus x und y selbst gegeben.

9) $a^{mx+ny} = p$ oder $mx + ny = \frac{\log p}{\log a}$

$b^{cx+dy} = q$ und $cx + dy = \frac{\log q}{\log b}$

woraus x und y selbst gegeben.

Sechster Abschnitt.

Von den unbestimmten Aufgaben des ersten Grades.

302) Sobald nicht eben so viel Bedingungen als unbekannte Größen in einer Aufgabe vorhanden sind, ist sie unbestimmt; aber auch dann, wenn eine hinreichende Anzahl von Bedingungen gegeben ist, jedoch nicht alle dazu dienen, um eine Gleichung herzustellen, in welcher die unbekannte Zahl mit bekannten verbunden ist, oder unter den gegebenen Gleichungen solche vorkommen, welche sich durch bloße arithmetische Aenderung auf eine andere der gegebenen Gleichungen zurückführen lassen.

1) Fragt man z. B. welches die Zahl ist, die sich durch 2 und 3 ohne Rest theilen läßt; so sieht man, daß hier nicht eine Zahl gesucht wird, sondern daß alle Zahlen genügen, die sich durch 2 und 3 theilen lassen, oder daß, wenn e alle Zahlen von 1 an bedeutet, 6e die Form der gesuchten ist Zahl.

2) Hat man die beiden Gleichungen

$$2x + 3y = 13$$
$$7x - 2y = 8$$

so kommt $x = 2$, $y = 3$

Wäre aber bloß gegeben

$$7x - 2y = 8$$

so nehme man y als bekannt an, so ist

$$2y = 7x - 8$$

$$\text{Daher } y = 3x - 4 + \frac{x}{2}$$

Soll man nun lauter ganze Zahlen als Werthe von y finden, so muß

$$3x - 4 + \frac{x}{2}$$

eine ganze Zahl sein. Dieß ist nur dann möglich, wenn $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl ist.

Setzt man also $\frac{x}{2} = e$, wo e irgend eine ganze Zahl bedeutet, oder $x = 2e$,

$$\text{so ist } y = 3x - 4 + e$$

$$= 6e - 4 + e = 7e - 4$$

Man hat also $x = 2e$

$$y = 7e - 4$$

Sollen beide Zahlen bloß positive Werthe haben, so ist $e > 0$. Man erhält also,

für e =	1	2	3	4	u. s. w.
x =	2	4	6	8	
y =	3	10	17	24	

Es erhellet also, daß durch die eine der angegebenen Gleichungen nur eine gewisse Gränze gegeben ist, unter welche der Werth der beiden unbekannten Zahlen nicht herabsinken kann. Man sieht, in welcher Zahlreihe ihre Werthe überhaupt liegen, keineswegs aber, welche bestimmte Zahlen ihnen zugehören. Erwägt man nun, welches von den hier angegebenen Zahlenpaaren der ersten Gleichung entspreche, so ist durch dieses die Aufgabe völlig gelöst. Dieß ist hier bei 2 und 3der Fall. Die andere Gleichung bezeichnet also in der ganzen Reihe von Zahlenpaaren eines als bestimmtes. Dasselbe hätte man erhalten, wenn man die Auflösung begonnen hätte mit:

$$2x + 3y = 13$$

$$\text{oder } 2x = 13 - 3y$$

$$x = 6 - y - \frac{y - 1}{2}$$

Soll x eine ganze Zahl werden, so muß auch $6 - y - \frac{y-1}{2}$ eine ganze Zahl seyn. Dieß ist nur möglich, wenn $\frac{y-1}{2}$ eine ganze Zahl ist.

Es sey $\frac{y-1}{2} = e$, oder $y - 1 = 2e$

oder $y = 2e + 1$, so ist

$$x = 6 - (2e + 1) - e = 5 - 3e$$

Man hat also:

$$\text{für } x = 5 - 3e$$
$$y = 2e + 1$$

Daher kann, wenn x und y ganze positive Werthe erhalten sollen, e bloß 0 oder 1 seyn.

$$\text{für } e = 0,\ 1$$
$$\text{ist } x = 5,\ 2$$
$$y = 1,\ 3$$

Nun entspricht aber nur der zweite Werth 2 und 3 der Gleichung II. Somit ist $x = 2$, $y = 3$, wie es die gewöhnliche Auflösung angibt.

3) Alle durch 5 theilbare ganze Zahlen zu finden, die durch 13 getheilt, p zum Rest lassen. Es seyen m und n unbestimmte ganze positive Zahlen. Also ist:

$$5m = 13n + p$$

$$m = 2n + \frac{3n + p}{5}$$

Ist m eine ganze Zahl, so ist auch

$$2n + \frac{3n + p}{5}$$

eine ganze Zahl: folglich auch $\frac{3n + p}{5}$ eine ganze Zahl, wenn 2n, wie nothwendig ist, eine ganze Zahl bedeutet. Bezeichnet also e eine ganze Zahl, und setzt man:

$$\frac{3n + p}{5} = e$$

oder $3n = 5e - p$

$$\text{so ist } n = e + \frac{2e - p}{3}$$

Dann muß, da e eine ganze Zahl ist, auch $\frac{2e - p}{3}$ eine ganze Zahl seyn. Diese ganze Zahl bezeichne man mit e', so ist

$$\frac{2e - p}{3} = e'$$

$$\text{oder } 2e = 3e' + p$$

$$e = e' + \frac{e' + p}{2}$$

Da nun e eine ganze Zahl ist und eben so e' als eine ganze Zahl angenommen wurde, so ist auch $\frac{e' + p}{2}$ eine solche. Bezeichnet man sie durch e'', oder setzt man

$$\frac{e' + p}{2} = e''$$

oder $e' = 2e'' - p$, so findet man:

$e' = 2e'' - p$

$e = e' + e'' = 2e'' - p + e'' = 3e'' - p$

$n = e + e' = 5e'' - 2p$

$m = 2n + e = 2(5e'' - 2p) + 3e'' - p = 13e'' - 5p$

Diese Werthe von m und n in die erste Gleichung gesetzt, geben:

$$5(13e'' - 5p) = 13(5e'' - 2p) + p$$

oder $65e'' - 25p$ als allgemeine Form der gesuchten Zahlen.

e''

		Ist also e =	1	2	3	4	5
und dabei	p = 1	so ist die Zahl	40	105	170	235	300
	p = 2	. . .	15	80	145	210	275
	p = 3	. . .		55	120	185	250
	p = 4	. . .		30	95	160	225
	p = 5	. . .		5	70	135	200
	p = 6	. . .			45	100	165

110 175

303) Anmerk. 1) Aus den gelösten Beispielen erhellet, daß man immer die Zahl durch die andere bestimmt, welche den kleinern Factor hat.

2) Nicht jede Gleichung mit zwei unbekannten Größen läßt sich in ganzen Zahlen auflösen. Insbesondere ist dieß dann nicht der Fall, wenn in

$$mx + ny = p$$

m, n, p ganze Zahlen sind und dabei m und n durch eine ganze Zahl r theilbar sind, ohne daß sich p durch dieselbe Zahl r theilen läßt. Denn es sei $\frac{m}{r} = a$, $\frac{n}{r} = b$, $\frac{p}{r}$ ein Bruch, so ist $ax + by = \frac{p}{r}$

Da aber nun a und x ganze Zahlen sind, so ist auch ax eine ganze Zahl; aus gleichem Grunde by; folglich müßten zwei ganze Zah-

len summirt einem Bruch gleich sein, welches unmöglich ist: es können also x und y nicht zugleich ganze Werthe haben.

3) Ob auch Bruchwerthe benützt werden können, hängt von der Natur der zu bestimmenden Größen ab. Ist nichts Besonderes gesagt, so sucht man blos ganze positive Werthe.

4) Es kommt zuweilen vor, daß der Quotient, welcher einer ganzen Zahl gleichzusetzen ist, die unbestimmte Größe subtractiv enthält, z. B. $\frac{a-be}{p}$. In diesem Falle gebe man den Gliedern im Dividenden die entgegengesetzten Zeichen und setze dem ganzen Quotienten — vor, (155).

$$\frac{a-be}{p} = -\frac{-a+be}{p} = -\frac{be-a}{p}$$

Z. B. Es sei $3x + 2y = 41$,

so ist $y = \frac{41-3x}{2} = 20 - x + \frac{1-x}{2} = 20 - x - \frac{x-1}{2} = 20 - x - e$

wenn $\frac{x-1}{2} = e$, also $x = 2e+1$ und $y = 20-(2e+1)-e = 19-3e$

folglich die Werthe von x und y

für e	=	0,	1,	2,	3,	4,	5, 6
x	=	1,	3,	5,	7,	9,	11, 13
y	=	19,	16,	13,	10,	7,	4, 1

Mehr als diese 7 Fälle giebt es nicht, wenn man blos positive Werthe zuläßt.

Aufgaben.

1) Es sollen 120 fl. in $\frac{2}{3}$ Thlrn. oder Achtzehnbäznern und preuß. Thalern gezahlt werden, wie viel Stücke werden von jeder Sorte erfordert, wenn der preuß. Thaler zu 1 fl. 39 kr. rhn. gerechnet wird? nim $\frac{2}{3}$ 120 = 1 fl. 12 kr.

$\frac{2}{3}$ Thlr. 100—11e, Preuß. Thaler 8e, wo e die Zahlen von 1 bis 9 bedeuten kann.

2) Man kauft zweierlei Sorten Waare für 182 fl., das Pfund der einen für 49 kr., das Pfd. der andern für 1 fl. 36 kr.; wie viel Pfund von jeder Sorte können es gewesen sein?

Von der ersten 264—96e, von der zweiten 49e — 21.

3) Will A dem B 120 fl. zahlen und er hat blos $\frac{2}{3}$ Thalerstücke, B blos preuß. Thaler zu 1 fl. 39 kr., wie viel muß A geben und wie viel giebt dann B heraus?

100 + 11e gegen 8e; dasselbe würde man in Aufgabe 1) erhalten, wenn man e = — e setzte.

4) Vielfache von 1393 und 985 zu finden, die um eine Zahl p verschieden sind.

A. $985 \cdot 1393e \pm 568345p$, $1393 \cdot 985e \pm 568344p$.

5) Welche Zahlen sind durch 9 theilbar und lassen durch 14 dividirt 8 zum Rest? A. $126e + 36$.

6) Welche von den Zahlen zwischen 100 und 400 giebt durch 13 getheilt 9, durch 17 getheilt 14 zum Rest? A. 269.

304) Sind mehr als zwei unbekannte Zahlen vorhanden, so ist die Unbestimmtheit desto größer, je weniger Gleichungen gegeben sind. Wir halten hier vorerst bloß den Fall fest, wo eine Gleichung weniger gegeben ist, als unbekannte Zahlen vorkommen. Hier schaffe man, wie bei der Auflösung bestimmter Aufgaben alle unbekannten Zahlen bis auf zwei weg, für welche man dann eine Gleichung hat, die, wie eben gelehrt, aufgelöst wird.

Die correspondirenden Werthe der übrigen Zahlen ergeben sich durch Substitution.

1. Beispiel. Alle Zahlen zu finden, die durch 3, 7, 10 dividirt 2, 3, 9 zum Rest lassen. Man hat:

$$m = 3x + 2$$
$$m = 7y + 3$$
$$m = 10z + 9. \text{ Hieraus}$$

1) $3x + 2 = 7y + 3$

$$3x = 7y + 1$$
$$x = 2y + \frac{y+1}{3} = 2y + e$$
$$y = 3e - 1$$

also $x = 2(3e-1) + e = 7e - 2$

also $3x + 2 = 21e - 4$

$$7y + 3 = 21e - 4$$

Folglich 2) $10z + 9 = 21e - 4$

$$10z = 21e - 13$$
$$z = 2e - 1 + \frac{e-3}{10} = 2e - 1 + e'$$
$$e = 10e' + 3$$
$$z = 2(10e' + 3) - 1 + e'$$
$$= 21e' + 5$$
$$x = 7(10e' + 3) - 2 = 70e' + 19$$
$$y = 3(10e' + 3) - 1 = 30e' + 8$$

Diese Werthe oben substituirt, geben

$$3x + 2 = 3(70e' + 19) + 2 = 210e' + 59$$
$$7y + 3 = 7(30e' + 8) + 3 = 210e' + 59$$
$$10z + 9 = 10(21e' + 5) + 9 = 210e' + 59$$

Folglich hat die Zahl m die Form

$$210e' + 59, \text{ wo } e' \text{ auch} = 0 \text{ sein kann.}$$

Z. B. 59 selbst giebt durch 3 getheilt 2, durch 7 getheilt 3, durch 10 getheilt 9 zum Rest; eben so die folgenden Zahlen, die um 210 als die kleinste durch 3, 7, 10 zugleich theilbare Zahl zunehmen.

2. Beispiel. Man soll 100 so in 3 Theile zerlegen, daß das 17fache des ersten, das 11 fache des zweiten, das Dreifache des dritten Theiles zusammen 880 giebt.

$$\text{I. } 100 = x + y + z$$
$$\text{II. } 880 = 17x + 11y + 3z$$

Multiplicirt man I. mit 3, um z gleichoft wie in II. zu erhalten, so kommt

$$300 = 3x + 3y + 3z$$

Diese Gleichung von II. abgezogen, giebt

$$580 = 14x + 8y, \text{ oder}$$
$$290 = 7x + 4y$$
$$4y = 290 - 7x$$
$$y = 72 - x + \frac{2 - 3x}{4} = 72 - x - \frac{3x - 2}{4}$$
$$= 72 - x - e$$
$$3x = 4e + 2$$
$$x = e + \frac{e + 2}{3} = e + e'$$
$$e = 3e' - 2$$
$$\text{also } x = e + e' = 4e' - 2$$
$$y = 72 - (4e' - 2) - (3e' - 2) = 76 - 7e'$$

Diese Werthe in I. substituirt, geben:

$$100 = 4e' - 2 + 76 - 7e' + z$$
$$= 74 - 3e' + z$$
$$\text{also } z = 26 + 3e'$$

Und es muß auch die zweite Gleichung auf eine identische zurückgebracht werden, wenn man diese Werthe in sie setzt:

$$880 = 17(4e' - 2) + 11(76 - 7e') + 3(26 + 3e')$$
$$= 68e' - 34 + 836 - 77e' + 78 + 9e'$$
$$= 77e' - 77e' + 880$$

305) Aufgaben.

1) Jemand kauft 124 Pfund verschiedener Waaren für 400 fl. Von der ersten Sorte kostet das Pfund $4\frac{1}{2}$, von der zweiten $3\frac{1}{6}$, von der dritten $1\frac{1}{4}$ fl.; wie viel Stück sind es von jeder Gattung?

A. 17 99 8
40 60 24
63 21 40

2) Aus 11löthigem, 12löthigem und 15löthigem Silber sollen 6 Mark 13löthiges gemischt werden. Wie viel Loth ist von jeder Sorte zu nehmen, wenn die Antwort in ganzen Lothen erfolgen soll?

3) Jemand verkauft von 3 verschiedenen Zeuchen 23 Ellen für 66 fl.; vom ersten Zeuch die Elle zu 24 fl., vom zweiten zu 5 fl., vom dritten zu $\frac{3}{4}$ fl.; wie viel von jeder Art? A. 1, 6, 16.

4) Eine Schule besteht aus 3 Klassen. In der ersten bezahlt jeder Schüler monatlich 3 fl., in der zweiten $2\frac{1}{2}$ fl., in der dritten 2 fl.; im Ganzen kommen monatlich 162 fl. Schulgeld ein. Wie viel Schüler sind in jeder Klasse, wenn die ganze Schule 78 Schüler hat? A. x, $12 - 2x$, $66 + x$.

306) Sind bei mehrern unbekannten Zahlen weniger Gleichungen gegeben, als die um 1 verminderte Anzahl derselben beträgt, so ist für jede Aufgabe eine besondere Behandlung nöthig, wie aus folgenden Beispielen erhellet:

1) Es sey in der eben angeführten 3ten Aufgabe die Anzahl der Ellen unbestimmt, also bloß die eine Gleichung gegeben:

$$24x + 5y + \tfrac{1}{3}z = 66 \text{ oder}$$

$$96x + 20y + 3z = 264$$

$$\text{so ist } 3z = 264 - 96x - 20y$$

$$\text{oder } z = 88 - 32x - \frac{20y}{3}$$

soll $\frac{20y}{3}$ eine ganze Zahl seyn, so sey $y = 3k$, so ist $\frac{20y}{3} = \frac{20 \cdot 3k}{3} = 20k$: also $z = 88 - (32x + 20k)$

Soll nun z nicht 0 seyn und bloß positive Werthe haben, so muß $88 > 32x + 20k$ seyn. Zugleich erhellet aber, daß wenn x und k ganze positive Zahlen seyn sollen, der niedrigste Werth beider, oder $x = 1$, $k = 1$ doch $32x + 20k = 52$ machen, daß hierbei x nicht mehr als um 1 steigen kann, weil schon für $x = 2$, $32x + 20k = 64 + 20 = 84$ wird. k kann auch nur die Werthe 1, 2, erhalten, während $x = 1$

bleibt: dann ist $32x + 20k = 52$ (für $k = 1$), $= 72$ (für $k = 2$). Hieraus ergeben sich nun folgende Fälle:

$x=1, k=1$, hieraus $32x+20k=52$; also $z=88-52=36$ u. $y=3k=3$

2 1 . . $32x+20k=84$; also $z=88-84=4$, $y=3$

1 2 . . $32x+20k=72$; also $z=88-72=16$, $y=6$

Der letzte Fall genügt zugleich der weitern in (305. 3) gegebenen Forderung, daß die Summe aller Ellen 23 sey.

2) Es sey die Gleichung gegeben:

$$\tfrac{5}{8}x + \tfrac{3}{4}y = 1 + z \text{ oder}$$

$$5x + 6y = 8 + 8z$$

Da nun $5x - 8 = 8z - 6y$, so muß, weil $8z - 6y$ durch 2 theilbar ist, auch $5x - 8$ durch 2 theilbar seyn, also auch $5x$ selbst, also muß x selbst eine gerade Zahl seyn, z. B. $= 2n$ (wo $n > 0$ übrigens willkührlich) so ist

$$10n - 8 = 8z - 6y \text{ oder } 5n - 4 = 4z - 3y$$

Setzt man nun in $5n - 4$, für n nach der Reihe 1, 2, 3, 4 . . . (wo dann $x = 2, 4, 6, 8$ . . . ist) so erhält $5n - 4$ die Werthe: 1, 6, 11, 16 . . . .

Jeder dieser Werthe gleich $4z - 3y$ gesetzt, bestimmt dann die möglichen Werthe von z und y selbst.

Ist $1 = 4z - 3y$, so ist $z = 3e + 1$, $y = 4e + 1$

$6 = 4z - 3y$, so ist $z = 3e$, $y = 4e - 2$

$11 = 4z - 3y$, so ist $z = 3e + 2$, $y = 4e - 1$

$16 = 4z - 3y$, so ist $z = 5e + 1$, $y = 6e - 4$

u. s. w.

So wie man also unendlich viel Werthe von x aufstellen kann, so gibt es für jeden dieser Werthe von x unendlich viele von z und y. Ist z. B. $n = 2$ oder $x = 4$, so ist $5n - 4 = 6$, folglich $z = 3e$, $y = 4e - 2$ und hier für $e = 1$, $z = 3$, $y = 2$. Dieß substituirt, gibt $\frac{5}{8} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 2 = 1 + 3$. wie verlangt.

307) Anhang.

1) Welche Zahlen geben summirt und multiplicirt Gleiches?

2) Welche Zahlen sind es, deren Summe sich zu ihrem Product verhält, wie a zu b?

3) Welche zwei Zahlen sind es, deren Summe zu ihrem Product addirt, 139 gibt?

4) Wie zerlegt man den Bruch $\frac{1}{77}$ in zwei andere (Factoren), deren Nenner 7 und 11 sind?

Siebenter Abschnitt.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 1.

Arithmetische Progressionen der ersten Ordnung.

308) Eine Reihe von Zahlen, deren jede gegen die nächstvorhergehende um Gleiches zu- oder abnimmt, heißt eine **arithmetische Progression.**

Beisp. 1 2 3 4 5 6 . . . .

5 7 9 11 13 . . . .

$a \quad a \pm d \quad a \pm 2d \quad a \pm 3d \quad a \pm 4d \ldots$

309) Bezeichnet man das nte Glied mit t, so ist für

$a, a+d, a+2d, a+3d \ldots t = a+(n-1)d$, denn

1 2 3 4 . . . . . n−1 n

$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \ldots a+(n-2)d \quad a+(n-1)d$

310) Addirt man hier je zwei von den äußersten Gliedern gleichweit abstehende Glieder, so erhält man gleiche Summen

$$a+a+(n-1)d = 2a+(n-1)d$$
$$a+d+a+(n-2)d = 2a+(n-1)d \text{ u. s. f.}$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so hat die Reihe $\frac{n}{2}$ Gliederpaare, somit ist dann die Summe der Reihe S gleich dem Betrag eines Gliederpaares mit der halben Summe multiplicirt, oder

$$S = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

Ist aber n eine ungerade Zahl, so ist ein mittles Glied übrig, das der halben Summe eines Gliederpaares gleich ist.

Es ist nämlich das Mittelglied, dann das $\frac{n+1}{2}$te Glied, somit beträgt es: $a+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)d$ oder $a+\frac{n-1}{2}d$

Es gilt also der Ausdruck für S auch, wenn n eine ungerade Zahl ist. Z. B. für 1, 2, 3, 4, 5 ist $1+5=2+4$ und $3=\frac{1+5}{2}=\frac{2+4}{2}$.

311) Sollten alle Glieder gleichgroß sein bei demselben Betrag des Ganzen, so müßte jedes die Hälfte der Summe eines solchen Gliederpaares sein, und diese heißt man daher das arithmetische Mittel der Glieder der Progression.

Das arithmetische Mittel wäre nach (191) die Summe aller Glieder mit der Anzahl der Glieder getheilt, und dieß ist der halben Summe eines Gliederpaares auch gleich. Das Mittelglied einer Progression von einer ungeraden Anzahl Glieder ist also auch das arithmetische Mittel derselben.

312) Ist nun a das erste Glied,
d der Unterschied,
n die Anzahl der Glieder,
t das letzte Glied,
S die Summe aller Glieder,

so lassen sich, wenn je drei von diesen Zahlen gegeben sind, die beiden übrigen finden.

1) Für a, d, n, t hat man die Gleichung

$$t = a + (n-1)\,d$$

woraus t, n, a, d gefunden wird, wenn die drei übrigen bekannt sind.

2) Aus $S=\frac{n}{2}\,(2a+(n-1)\,d)$ findet man S, n, a, d.

3) Hat man aus 1) gefunden $a=t-(n-1)\,d$ und aus 2) $a=\frac{S}{n}-\frac{(n-1)\,d}{2}$ so ist $t-(n-1)\,d=\frac{S}{n}-\frac{(n-1)\,d}{2}$ oder $t-\frac{n-1}{2}\,d=\frac{S}{n}$, woraus sich t, n, d, S, bestimmen lassen.

4) Da in 1) $n=\frac{t-a+d}{d}$ ist, so erhält man, wenn man dieß in 3) setzt, eine Gleichung zwischen t, a, d, S, die sich aus ihr bestimmen lassen.

5) Auf gleiche Weise kann man aus 3) erhalten:

$d=\left(t-\frac{S}{n}\right)\frac{2}{n-1}$ und aus 1) $d=\frac{t-a}{n-1}$, also

$$\frac{t-a}{n-1}=\frac{2(nt-S)}{n(n-1)}$$

woraus, wenn von t, n, a, S eine Zahl unbekannt ist, die 3 übrigen sie bestimmen.

Man erhält hieraus folgende Werthe der einzelnen Zahlen für gewisse gegebene andere.

1) $t = a + (n-1)\,d$

$a = t - (n-1)\,d$

$d = \frac{t-a}{n-1}$

$n = \frac{t-a}{d} + 1$

2) $S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)\,d)$

$d = \frac{2S - 2an}{n(n-1)}$

3) $t = \frac{S}{n} + \frac{(n-1)\,d}{2}$

$S = \frac{n}{2}(2t - (n-1)\,d)$

$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2S}{d}\right)}$

$d = \frac{2nt - 2S}{n(n-1)}$

4) $t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(2dS + (a - \frac{1}{2}d)^2)}$

$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right)}$ $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{([t + \frac{1}{2}d]^2 - 2dS)}$

$a = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$

$d = \frac{(t+a)(t-a)}{2S - t - a}$

$S = \frac{a+t}{2} + \frac{(t+a)\ (t-a)}{2d}$

5) $S = \frac{1}{2}n\,(a+t)$

$n = \frac{2S}{a+t}$

$a = \frac{2S}{n} - t$

$t = \frac{2S}{n} - a$

313) Beispiele und Aufgaben.

1) Was ist letztes Glied und Summe folgender n gliederiger Reihen? *)

1 2 3 4 . . . . . $t = n$, $S = \frac{n(n+1)}{2}$

1 3 5 7 . . . . . $t = 2n-1$, $S = n^2$

1 4 7 10 . . . . $t = 3n-2$, $S = \frac{n(3n-1)}{2}$

Was für 7, 9, 12 und 100 Glieder?

2) Wenn die Reihe $-7 -4 -1 +2 +5$ . . . 10 Glieder hat, so ist $t = -7 + 9.3 = 20$, $S = 5\,(-14 + 9.3) = 65$.

---

*) Das letzte Glied einer n gliederigen Progression heißt man auch das allgemeine Glied derselben, da es eine Formel für alle einzelnen ist, wenn man statt n eine bestimmte Zahl setzt.

3) Wenn die Reihe: 50 48 46 . . . 27 Glieder hat, so ist $a = 50$, $d = -2$, $n = 27$, daraus t und S zu finden.

4) Einen Brunnen von 36′ Tiefe zu graben, zahlt man für den ersten Fuß $40\frac{1}{2}$ kr., für jeden folgenden Fuß 2 kr. mehr, wie viel für das Ausgraben des ganzen Brunnens? 45 fl. 18 kr.

5) Wenn 3500 fl. zu 4 pct. ausgeliehen werden und jedes Jahr dem Kapital 300 fl. zugelegt wird: wie viel betragen die sämmtlichen Zinsen in 24 Jahren? A. 6672 fl.

Erläuterung. Jedes Jahr werden die Zinsen des vorigen Jahres um die aus 300 fl. oder um $300 . \frac{4}{100} = 12$ fl. vermehrt.

6) In wie viel Jahren würde man hier so viel Zins eingenommen haben, als das Anfangskapital war, oder 3500 fl.?

7) Jeder Körper, der im luftleeren Raum fällt, legt in der ersten Secunde ohngefähr $15\frac{5}{8}$′, in jeder folgenden $31\frac{1}{4}$ mehr als in der nächstvorhergehenden Secunde zurück, wie viel Fuß wird er in der 20sten Secunde zurücklegen; wie tief wird er in 20 Secunden im Ganzen gefallen sein? A. $609\frac{3}{4}$′ und 6250′.

8) Soll er aber 4000′ fallen, wie viel Secunden braucht er? A. 16 Sec.

9) Wenn vom 10. — 21. Juli eines Jahres das Thermometer täglich um $\frac{1}{2}$ Grad stieg und das arithmetische Mittel dieser 12 Thermometerstände $18\frac{3}{4}$ Grad war, wie hoch stand es am 10? A. 16 Grad.

10) Wenn ein Kapital k, das p Procent Zins trägt, in n Jahren in gleichen Termingeldern am Ende des Jahres zahlbar abgetragen werden soll, wie viel beträgt ein Termingeld?

Das Kapital mit seinem Zins muß am Ende der Zeit eben so viel betragen, als die einzelnen Zahlungen mit den Zinsen, die sie dem Empfänger tragen (278). Die letztern sind aber für jedes Jahr $\frac{xp}{100}$ und da von der ersten Zahlung an dieser Zins (n−1), von der zweiten (n − 2) . . . endlich von der letzten 0 Jahre lauft, so hat man folgende arithmetische Progression.

$$x + \left(x + \frac{p}{100}x\right) + \left(x + \frac{2p}{100}x\right) + \ldots . \left(x + \frac{(n-1)p}{100}x\right)$$

und die Gleichung:

$$k + \frac{knp}{100} = \left(2x + (n-1)\frac{px}{100}\right)\frac{n}{2}$$ woraus man findet:

$$x = \frac{\frac{2k}{n}\left(1 + \frac{np}{100}\right)}{2 + \frac{(n-1)p}{100}} = \frac{2k(100 + np)}{200n + n(n-1)p}$$

11) Ein haubarer Waldbestand von 80000 Cubikfuß Masse und $1\frac{1}{2}$ pct. jährl. Zuwachs soll so abgetrieben werden, daß am Ende jedes Jahres der 5te Theil des Ganzen, am Ende des 5ten Jahres also der Rest geschlagen wird, wie viel Cubikfuß darf man jährlich schlagen?

Erläuterung. Der jährliche Zuwachs ist ganz so zu betrachten, wie die Vermehrung eines Kapitals durch den einfachen Zins, und es gelten hier alle Sätze der Zinsrechnung, folglich für gegenwärtige Aufgabe ganz die Formel in Beisp. 10., oder es ist der Ansatz:

$$80000 + 80000.5.\frac{1\frac{1}{2}}{100} = x + \left(x + x.\frac{1\frac{1}{2}}{100}\right) + \left(x + x.2.\frac{1\frac{1}{2}}{100}\right)$$

$$+ \left(x + x.3.\frac{1\frac{1}{2}}{100}\right) + \left(x + x.4.\frac{1\frac{1}{2}}{100}\right) = \frac{5}{2}\left(2x + x4.\frac{1\frac{1}{2}}{100}\right)$$

12) Ein Kapitalist verzehrt 16000 fl. zu 4 pct. verzinslich in 10 Jahren nebst Zinsen, so daß er immer zu Anfang des Jahres eine gleiche Summe nimmt, wie viel beträgt diese? Allgemeine Formel, wie in Beisp. 10., nur lauft der Zins des ganzen Kapitals n — 1 Jahre. A. $1814\frac{4}{5}\frac{4}{9}$ fl.

13) Sollen am Ende des 10ten Jahres 6000 Gulden übrig sein, so darf er nur wegnehmen jährlich 1355 fl. 9 kr. ohngefähr. Es sind nämlich die 6000 fl. am Ende des 10ten Jahres zahlbar am Anfang desselben $5769\frac{3}{13}$ fl. (s. 278.), folglich ist:

$$16000\ (1 + 9.\tfrac{4}{100}) - 5769\tfrac{3}{13} = x\ (2 + 9.\tfrac{4}{100}).5$$

14) Wenn ein Waldbestand von 40000 C. F. Masse zu 2 pct. Zuwachs 11 Jahre lang so benützt werden soll, daß zu Ende jedes Jahres eine Masse geschlagen wird und doch am Ende des 10ten Jahres 10000$^{c'}$ vorhanden sind: wie viel darf man jährlich schlagen?

Allgemeine Formel: $k + \frac{knp}{100} - a = \left(2x + (n-1)\frac{px}{100}\right)\frac{n}{2}$

15) Von einem Wald mit $2\frac{1}{2}$ pct. Zuwachs hat eine Gemeinde 5 Jahre lang am Ende jedes Jahres 18000 C. F. zu empfangen. Wenn man ihr den Wald zur eigenen Abholzung überläßt, wie viel Cub. Fuß Bestand muß er haben? Hier ist in der Formel in 10) die jährliche Abholzung bekannt und k oder der Bestand ist gesucht.

16) Von einem Waldbestand von 36000$^{c'}$ zu 2 pct. Zuwachs sollen jährlich 2400$^{c'}$ geschlagen werden, jedesmal am Ende des Jahres, wie oft wird man diese schlagen können? Hier ist in der allgemeinen Formel bei 10) n unbekannt.

17) Vor 10 Jahren hatte ein haubarer Waldbestand 450000$^{c'}$ Masse; man nahm am Ende jedes Jahres 18000$^{c'}$ weg und hat jetzt noch 300000$^{c'}$, wie viel Procent war Zuwachs? Hier ist in der Formel 13) die Zahl der Procente oder p unbekannt.

18) Man weiß, daß ein Wald 300000$^{c'}$ Masse und 1,75 pct. Zuwachs hat; sollen jährlich 18000$^{c'}$ 12 Jahre lang immer am Ende jedes Jahres abgegeben werden, wie viel c' werden nach der letzten Abgabe noch vorhanden sein? Setzt man die jährliche Abgabe $= q$, so ist in der Formel 14) a unbekannt.

19) Ein 80 jähriger Bestand hat jetzt zu Ende des Jahres 1,25 pct. Zuwachs bei 240000$^{c'}$; will man ihn 90 Jahre alt werden lassen und dann bis zum Ende des 100 Jahres in gleichen jährlichen Quantitäten abholzen, wie viel erträgt er jährlich?

Ansatz: $240000\left(1+\frac{20\,.\,1\frac{1}{4}}{100}\right)=x\left(2+\frac{9\,.\,1\frac{1}{4}}{100}\right).5$

20) Zwei um 164 Meilen entfernte Personen gehen einander entgegen. Die erste macht täglich 10 Meilen, die zweite am ersten Tag 7, jeden folgenden 1 Meile mehr als am vorhergehenden. In wie viel Tagen begegnen sie sich? A. in 8 Tagen.

§. 2.

Arithmetische Progressionen der höhern Ordnungen.

314) Summirt man in den Reihen unter I. die Glieder vom ersten Gliede bis zu jedem folgenden nach der Ordnung, so entstehen daraus die unter II. angeführten Progressionen. Eben so entstehen aus den Reihen in II. die Reihen in III.

I.

1	2	3	4	5	6	. . .	n
1	3	5	7	9	11	. . .	2n — 1
1	4	7	10	13	16	. . .	3n — 2
1	5	9	13	17	21	. . .	4n — 3
⋮				⋮			⋮
1	1+d	1+2d	1+3d	. . .	. . .	. . .	dn — (d — 1)

II.

1 3 6 10 15 21 . . . . $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

1 4 9 16 25 36 . . . . $\frac{n(2n)}{1 \cdot 2}$ oder n^2

1 5 12 22 35 51 . . . . $\frac{n(3n-1)}{1 \cdot 2}$

⋮ ⋮ ⋮

1 2+d 3+3d 4+6d . . . . $\frac{n(dn-(d-1)+1)}{1 \cdot 2}$ oder $\frac{n(nd-d+2)}{1 \cdot 2}$

III.

1 4 10 20 35 . . . . $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

1 5 14 30 55 . . . . $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

1 6 18 40 75 . . . . $\frac{n(n+1)(3n)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ oder $\frac{n^2(n+1)}{1 \cdot 2}$

⋮ ⋮ ⋮

1 3+d 6+4d 10+10d . . . . $\frac{n(n+1)(nd-d+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Auf ähnliche Weise kann man beliebig viel höhere Ordnungen ableiten.

315) Die Reihen in II. nennt man Polygonal- oder Vieleckszahlen, weil sich mit ihren Einheiten ein Drei-, Vier-, Fünf ꝛc. Eck darstellen läßt. Z. B.

. . . aus der ersten Reihe in II.

. . . . . Aus der 2ten Reihe in II.

Die Reihen in III. heißt man Pyramidalzahlen, weil sich ihre Einheiten (wenn sie z. B. Kugeln sind) in Pyramiden von drei, vier und mehrseitiger Grundfläche aufschichten lassen. Z. B. $10 = 6 + 3 + 1$

Auf den 6 Kugeln, die in . . zusammengestellt sind, haben drei Kugeln Raum . . und auf diesen eine. Hierdurch

entsteht eine Pyramide, die an jeder Kante drei Kugeln zeigt, und 10 Kugeln enthält.

$$30 = 1 + 14 + 9 + 16$$

Auf 16 Kugeln im Quadrat zusammengelegt, können liegen 9, auf diesen 4, auf diesen 1. So entsteht eine 4seitige Pyramide, die 30 Kugeln enthält und an jeder Seite 4 Kugeln zeigt.

316) Von der Richtigkeit der allgemeinen Glieder der Reihen in II. überzeugt man sich leicht auf folgende Weise. Da jede Reihe in II. durch Summirung der Glieder der Reihen in I. entsteht, so ist das allgemeine Glied in II. gleich der Summe aller Glieder derselben Reihe in I. Z. B.

I) 1 2 3 4 . . . . n

II) 1 3 6 10 . . . . $\frac{n(n+1)}{1.2}$

III) 1 4 10 20 . . . . $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

Ist nun $\frac{n(n+1)}{1.2}$ wirklich die Summe der n ersten Zahlen, so muß das Glied, welches dem nten in II. vorausgeht, die Summe der Zahlen von 1 bis $n-1$ sein. Zieht man also dieses vom nten Glied ab, so muß das nte Glied der vorhergehenden Reihe kommen.

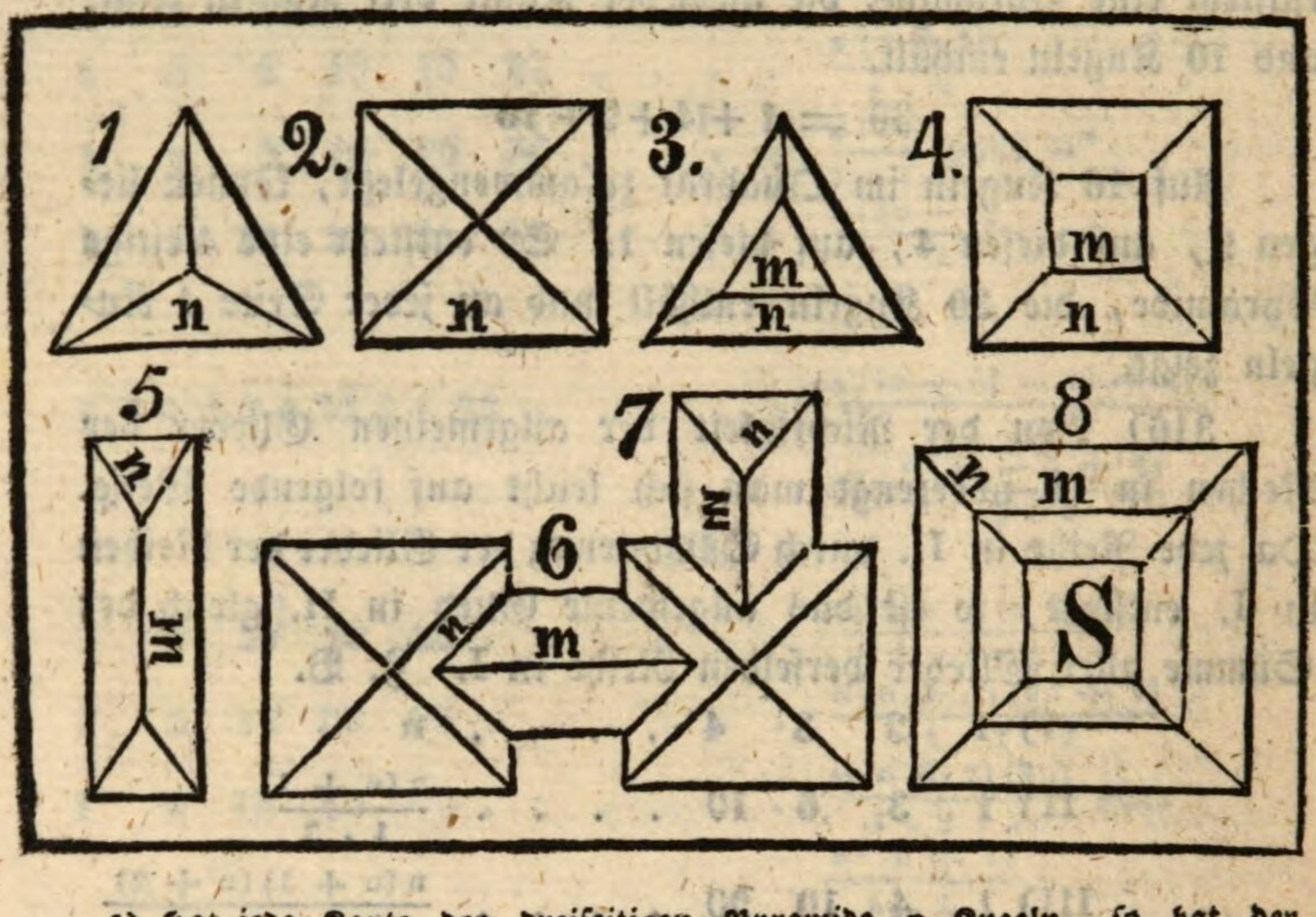
Beispiele:

$$\frac{n(n+1)}{1.2} - \frac{(n-1)n}{1.2} = n$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - \frac{(n-1)(n)(n+1)}{1.1.3} = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

317) Mittels dieser figurirten Zahlen können zunächst folgende Aufgaben gelöst werden.

In den Zeughäusern schichtet man die Kugeln meist in 3 und 4seitigen Pyramiden oder in Sargform aufeinander, so daß von oben angesehen die Kanten sich so darstellen:



1) Hat jede Kante der dreiseitigen Pyramide n Kugeln, so hat der Haufe $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ (Fig. 1.) hat sie n bei der 4 seitigen, so enthält der Haufe $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$ (Fig. 2.) Die unterste Schicht hat im ersten Fall $\frac{n(n+1)}{1.2}$, im andern n^2 Kugeln.

2) Ist der Haufe oben abgebrochen, wie in Fig. 3. und 4., so fehlt oben eine Pyramide, deren Kante $m-1$ ist, wenn die oberste Schicht an der Kante m Kugeln hat. Die ganze Pyramide hat also dann

a) für drei Seiten:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}$$

b) für vier Seiten:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{1.2.3}$$

3) Gewöhnlich schichtet man die Kugeln nach Fig. 5. auf. Hat hier die oberste Reihe m Kugeln, so werden diese getragen von $2m+2$ oder $2(m+1)$; diese von $3(m+2)$ u. s. f., bis endlich die nte Schicht $n(m+n-1)$ Kugeln enthält. Im Ganzen hat man also $m + 2(m+1) + 3(m+2) + 4(m+3) + \ldots + n(m+n-1)$ Kugeln, oder $m(1+2+3+\ldots.n) + 2.1$

$+ 3.2 + 4.3 + \ldots + \frac{2n(n-1)}{2}$ oder $2(1 + 3 + 6 + \ldots$

$\frac{n(n-1)}{1.2}\Big)$. Nun ist aber nach (314. II.) $1 + 2 + 3 + \ldots$

$+ n = \frac{n(n+1)}{1.2}$, $1 + 3 + 6 + \ldots \frac{n(n-1)}{1.2} =$

$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1.2.3}$ also ist die gesuchte Summe:

$$\frac{m.n(n+1)}{1.2} + \frac{2(n-1)\,n\,(n+1)}{1.2.3} = \frac{3mn(n+1) + 2(n-1)\,n(n+1)}{1.2.3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1.2.3}$$

4) Schichtet man einen Haufen zwischen zwei andere, wie in Fig. 6., und es enthält die oberste Reihe m Kugeln, so liegen unter diesen 2 Reihen, jede von $m-1$ Kugeln, also $2(m-1)$ Kugeln; unter diesen $3(m-2)$ u. s. f. Bis in der nten Reihe $n(m-[n-1])$ oder $n(m+1-n)$ sich finden, man hat also durch eine der vorigen ähnliche Zerlegung als Summe

$$\frac{n(n+1)(3m-2n+3)}{1.2.3}$$

5) In Fig. 7. lehnt sich der Haufe nur auf einer Seite an, muß also auf der andern sich selbst stützen. Hier bleibt also die Anzahl Kugeln in jeder Reihe dieselbe, nur findet sich in jeder tiefern Lage eine Reihe Kugeln mehr; also hat man:

$m + 2m + 3m + 4m + \ldots\ldots + (n-1)\,m$ oder

$$m(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots n-1) = \frac{m.n(n+1)}{1.2}$$

6) In Fig. 8. ist das Quadrat S des Bodens von dem Haufen umgeben, dessen oberste Kante in jeder Seite m Kugeln enthalte; so hat die 2te Schicht nach unten 2 Reihen von $m+1$ und $m-1$ Kugeln, die dritte 3 Reihen von $m+2$, m und $m-2$ Kugeln, die vierte 4 Reihen von $m+3$, $m+1$, $m-1$, $m-3$ Kugeln, u. s. f. Hieraus ersieht man, daß in jeder Seite $m + 2m + 3m + 4m + \ldots n.m$ Kugeln sich finden, oder $\frac{mn(n+1)}{1.2}$, folglich in allen vier Seiten $2mn(n+1)$.

Achter Abschnitt.

Von den Combinationen.

318) Einzelne Dinge, welcher Beschaffenheit sie sein mögen, können auf manchfaltige Art mit einander verbunden werden. Sieht man bei der Verbindung der Dinge blos auf die Anzahl der Verbindungen, so gehört die Lehre von dem Verbinden und Ordnen des Verbundenen in die Arithmetik, sieht man auf die Art und Weise der Verbindung, so hat man es mit irgend einer andern Wissenschaft zu thun. Z. B. zu untersuchen, auf welche Art die Stoffe sich mischen, ist Gegenstand der Chemie; auf wie viel Arten aber eine Anzahl einzelner Stoffe verbunden werden können, ist eine arithmetische Frage.

319) Die einzelnen Dinge, welche verbunden werden, heißen Elemente; man bezeichnet sie durch a, b, c .... und deutet ihre Verbindung durch Nebeneinanderschreiben an: z. B. abc. Hat man nun eine Anzahl einzelner Elemente, so kann man fragen:

a) zu wie viel Verbindungen lassen sie sich zusammenstellen (Combiniren).

b) Auf wie viel Arten läßt sich das Verbundene anordnen oder umstellen (Permutiren).

c) Wie viel Fälle erhält man, wenn man gegebene Elemente verbindet und mit den verbundenen alle mögliche Umstellungen vornimmt (Variiren).

Anmerk. Jeder in abc ... folgende Buchstabe soll gegen den vorhergehenden ein höheres Element bezeichnen und die Elemente folgen rechts steigend aufeinander.

§. 1.

Vom Combiniren.

320) Jede Verbindung von Elementen heißt man eine Complexion von der so vielsten Klasse, als Elemente ver-

bunden sind, z. B. abc ist eine Komplexion der dritten Klasse. Ist dasselbe Element mit sich verbunden, so gibt dieß eine Wiederholung, z. B. aaa. Ein einzelnes Element heißt auch uneigentlich eine Verbindung der ersten Klasse.

a) Combinationen ohne Wiederholungen.

321) Soll man eine Anzahl, z. B. sechs verschiedene Elemente a, b, c, d, e, f verbinden, so daß blos verschiedene Elemente in einer Komplexion vorkommen und keine Komplexion dieselben Elemente, die eine andere hat, enthalte, so verfahre man nach folgender Regel:

1) Setze die Elemente in eine bestimmte Reihe.
2) Verbinde so viele der niedrigsten Elemente, als die Klassenzahl verlangt, so ist dieß die erste Komplexion.
3) Jede folgende Verbindung entsteht nun dadurch aus der nächst vorhergehenden, daß man statt des letzten Elements in dieser so lange das nächsthöhere setzt, als die Anzahl der gegebenen Elemente dieß gestattet. Ist kein Element mehr vorhanden, so geht man in der letzten Verbindung so weit von der rechten zur linken, bis man zu einem Element kommt, das kein nächstniedrigeres, sondern ein früheres ist, statt dieses E. setze man sein nächsthöheres; in die rechts offenen Stellen setze man so viele von den nächsthöhern Elementen, als nöthig und verfahre dann wieder wie Anfangs. Die letzte Verbindung enthält dann so viele der höchsten Elemente, als die Klassenzahl angibt.

Beispiel. Die 2te Kombinationsklasse mit 2, 3, 4, 5, 6 Elementen ohne Wiederholungen darstellen.

ab	ab	ab	ab	ab	cd
	ac	ac	ac	ae	ce
	bc	ad	ad	ad	cf
		bc	ae	ae	de
		bd	bc	af	df
		cd	bd	bc	ef
			be	bd	
			cd	be	
			ce	bf	
			de		

Man erhält also hier die Zahlen 1, 3, 6, 10, 15 . . .
Die 3te Klasse gibt für 3, 4, 5, 6 Elemente:

abc	abc	abc	abc bcd
	abd	abd	abd bce
	acd	abe	abe bcf
bcd	acd	abf	bde
	ace	acd	bdf
	ade	ace	bef
	bcd	acf	cde
	bce	ade	cdf
	bde	adf	cef
	cde	aef	def

Hier erhält man also die Zahlen: 1, 4, 10, 20.

Die 4te Klasse für 4, 5, 6 Elemente gibt:

abcd	abcd	abcd	bcde
	abce	abce	bcdf
	abde	abcf	bcef
	acde	abde	bdef
	bcde	abdf	cdef
		abef	
		acde	
		acdf	
		acef	
		adef	

Die 5te Klasse für 5 und 6 Elemente:

abcde	abcde
	abcdf
	abcef
	abdef
	acdef
	bcdef

Folglich hat man hier die Zahlen: 1, 5, 15 und 1, 6.

322) Es zeigt sich also, daß für die Klassenzahl I, II .. und die Anzahl der Elemente 1, 2, 3 . . . folgende Anzahlen von Verbindungen sich ergeben:

Elemente	1	2	3	4	5	6 . . .
Kl. I.	1	2	3	4	5	6 . . .
II.		1	3	6	10	15 . . .
III.			1	4	10	20 . . .
IV.				1	5	15 . . .
V.					1	6 . . .

Diese Zahlen sind aber die figurirten Zahlen, die im vorigen Kapitel summirt wurden. Sie hängen so von der

Anzahl der Elemente und der Klassenzahl zugleich ab, daß die Zahl der Combinationsklasse auch die Ordnung der figurirten Zahlen angibt, deren Glieder die Anzahl der Verbindungen für gewisse Elemente enthalten, wie z. B. die zweite Klasse der Combinationen figurirte Zahlen der zweiten Ordnung sind. Aber diese Glieder der Reihen selbst werden für jede Anzahl von Elementen so bestimmt, daß z. B. in der dritten Klasse für 5 Elemente nicht das 5te Glied der Reihe, sondern das dritte, für 6 Elemente in der zweiten Klasse nicht das 6te Glied der Reihe, sondern das 5te die Anzahl der Verbindungen angibt. Bedeutet also n die Anzahl der Elemente, m die Klasse, so ist nicht das nte Glied der figurirten Zahlen, sondern das $n-(m-1)$te Glied die für n Elemente in der mten Klasse mögliche Anzahl von Verbindungen. So ist z. B. in der 3ten Klasse für 6 Elemente das $6-(3-2)$ te Glied der 3ten Ordnung der figurirten Zahlen oder 20 die Verbindungszahl.

Würde jede Klasse gleich mit dem ersten Element darstellbar sein, so wäre für n Elemente der mten Combinationsklasse die richtige Anzahl der Verbindungen das nte Glied der mten Ordnung der figurirten Zahlen oder:

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+[m-1])}{1.2.3.\ldots.m}$$

Da aber schon das $(n-[m-1])$ te Glied dieser Reihe die richtige Anzahl gibt, so muß man für n Elemente in diesem Ausdruck $n-(m-1)$ setzen, so hat man:

$$\frac{(n-[m-1])(n-[m-1]+1)(n-[m-1]+2)\ldots(n-[m-1]+[m-2])}{1.2.3.\ldots.m}$$

$$(n-[m-1]+[m-1])$$

oder $$\frac{(n-[m-1])(n-[m-2])\ldots(n-1)\,n}{m\ldots.3.2.1} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-[m-1])}{1.2.3\ldots.m}$$

Z. B. für $n=6$, $m=4$ hat man:

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15 \text{ wie oben.}$$

b) Combinationen mit Wiederholungen.

323) Darf in den Verbindungen gegebener Elemente jedes Element mit sich selbst verbunden vorkommen, so hat man Combinationen mit Wiederholungen.

Soll man eine Anzahl verschiedener Elemente zu einer gewissen Klasse auf alle mögliche Weisen mit Wiederholungen verbinden, so verfahre man nach folgender Regel:

1) Verbinde das niedrigste Element so oft mit sich selbst, als die Klassenzahl anzeigt, so ist dieß die erste Komplexion.

2) Jede folgende leitet man aus der nächst vorhergehenden so ab, daß man für das letzte Element so lange ein nächsthöheres setzt, als Elemente vorhanden sind. Sind alle Elemente nach der Reihe gesetzt, so gehe man in der Complexion so weit von der Rechten zur Linken, bis man auf ein Element kommt, das nicht das höchste ist; für dieses setze man das nächsthöhere und fülle die rechts leeren Stellen mit ihm gleichen Elementen aus. Die Stellen links besetzt man mit den bisherigen Elementen. Die letzte Verbindung enthält das höchste Element so oft, als die Klassenzahl anzeigt.

Beispiele. Die II., III., IV., V. Klasse mit 1—6 Elementen a, b, c, d, e, f darstellen.

II. Klasse:

aa	aa	aa	aa	aa	cc	aa	cc
	ab	ab	ab	ab	cd	ab	cd
	bb	ac	ac	ac	ce	ac	ce
		bb	ad	ad	dd	ad	cf
		bc	bb	ae	de	ae	dd
		cc	bc	bb	ee	af	de
			bd	bc		bb	df
			cc	bd		bc	ee
			cd	be		bd	ef
			dd			be	ff
						bf	

Man erhält also die Zahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21.

III. Klasse.

aaa	aaa	aaa	aaa	bbb	aaa	bbb ccc
	aab	aab	aab	bbc	aab	bbc ccd
	abb	aac	aac	bbd	aac	bbd cce
bbb	abb	aad	bcc		aad	bbe cdd
	abc	abb	bcd		aae	bcc cde
	acc	abc	bdd		abb	bcd cee
	bbb	abd	ccc		abc	bce ddd
	bbc	acc	ccd		abd	bdd dde
	bcc	acd	cdd		abe	bde dee
	ccc	add	ddd		acc	bee eee
					acd	
					ace	
					add	
					ade	
					aee	

Man sieht, daß hier die Anzahl der Verbindungen 1, 4, 10, 20, 35 . . . sind.

IV.

aaaa	aaaa	aaaa	aaaa	abcd	bccc
	aaab	aaab	aaab	abdd	bccd
	aabb	aaac	aaac	accc	bcdd
	abbb	aabb	aaad	accd	bddd
	bbbb	aabc	aabb	acdd	cccc
		aacc	aabc	addd	cccd
		abbb	aabd	bbbb	ccdd
		abbc	aacc	bbbc	cddd
		abcc	aacd	bbbd	dddd
		accc	aadd	bbcc	
		bbbb	abbb	bbcd	
		bbbc	abbc	bbdd	
		bbcc	abbd		
		bccc	abcc		
		cccc			

Hier hat man also die Zahlen 1, 5, 15, 35 . . .

V. Klasse.

aaaaa	aaaaa	aaaaa bbbbb
	aaaab	aaaab bbbbc
	aaabb	aaaac bbbcc
	aabbb	aaabb bbccc
	abbbb	aaabc bcccc
	bbbbb	aaacc ccccc
		aabbb
		aabbc
		aabcc
		aaccc
		abbbb
		abbbc
		abbcc
		abccc
		acccc

Man erhält also die Zahlen, 1, 6, 21.

324. Stellt man diese Ergebnisse zusammen, so erhält man folgende Tafel:

Elemente	1	2	3	4	5	6
Klasse I.	1	2	3	4	5	6
II.	1	3	6	10	15	21
III.	1	4	10	20	35	
IV.	1	5	15	35		
V.	1	6	21			

Für die II. Klasse der Verbindungen mit Wiederholungen ist also die Anzahl der Complexionen bei n Elementen $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$. Denn für $n = 6$ gibt dieß $\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$, wie gefunden ist.

Für die III. Klasse hat man bei n Elementen als Anzahl der Complexionen $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Denn $n = 4$ gesetzt, hat man $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$, wie sich ergeben hat.

Hieraus ersieht man also, daß sich allgemein die figurirten Zahlen als Anzahlen der Verbindungen ergeben und daß,

wenn m die Klassen-, n die Elementenzahl ist, die Anzahl der Verbindungen das nte Glied in der mten Ordnung der figurirten Zahlen ist, oder

$$\frac{n\,[n+1]\,[n+2]\,\ldots\,(n+[m-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,m}$$

Z. B. die 4te Klasse mit 5 Elementen gibt: 4

$$\frac{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 35 \text{ wie oben.}$$

Die 5te Klasse mit 3 Elementen:

$$\frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 21 \text{ wie oben.}$$

§. 2.

Versetzungen oder Permutationen.

325) Sind Elemente verbunden, so kann man die Aufgabe stellen, sie auf alle mögliche Weisen zu ordnen oder zu versetzen (permutiren) und dann verfährt man nach folgender Regel:

a) wenn alle Elemente verschieden sind.

1) Man setze das höchste Element einzel, z. B. bei 4 Elementen d.

2) Ihm setze man c vor und verwechsle beide, so hat man die Versetzungen der beiden letzten Elemente.

3) Diesen setze man b vor, so hat man alle Versetzungen der drei höchsten Elemente, wo b vorn stehen kann, oder die Ordnung b von den Versetzungen dieser drei Elemente. Statt b setzt man c und bildet mit b und d alle Versetzungen; eben so d statt c, wo man dann mit b und c alle Versetzungen aufstellt. So erhält man alle mögliche Versetzungen der drei höchsten Elemente.

4) Diesen setze man a vor, so hat man von den Versetzungen aller 4 Elemente diejenigen, wo a vorn steht; setzt man für a erst b, dann c und d, und bildet man, während b vorn steht, mit a, c, d, wenn c vorn steht, mit a, b, d, und bei d mit a, b, c alle Versetzungen, so hat man alle mögliche Versetzungen der 4 Elemente.

5) Wären mehr als 4 Elemente gegeben, so würde man das 5te Element jeder Permutation der 4 Elemente vorsetzen, und nach und nach mit den 4 folgenden vertauschen, während die 4 übrigen alle jedesmal alle Versetzungen zu 4 durchmachten.

Beispiel:

ab	abc	abcd	cabd
ba	acb	abdc	cadb
	bae	acbd	cbad
	bca	acdb	cbda
	cab	adbc	cdab
	cba	adcb	cdba
		bacd	dabc
		badc	dacb
		bcad	dbac
		bcda	dbca
		bdac	dcab
		bdca	dcba

326) Hieraus bestimmt sich die Anzahl der Versetzungen so:

1) Bei 2 Elementen hat man 2 Versetzungen;
2) bei 3 E. hat man 3 Ordnungen von 2 Versetzungen, somit 3 . 2 Versetzungen;
3) bei 4 Elementen gibt es 4 Ordnungen von 3 . 2 Versetzungen, somit 4 . 3 . 2 = 24 Permutationen;
4) bei 5 E. würde es 5 Ordnungen von 4 . 3 . 2 Versetzungen, folglich 5 . 4 . 3 . 2 = 120 Versetzungen geben.

Allgemein sieht man also, daß für n Elemente die Anzahl der Permutationen 1 . 2 . 3 . 4 . . . . n ist.

327) b) Wenn unter den Elementen gleiche vorkommen:

1) Sind alle Elemente gleich, so erhält man außer der gegebenen keine weitere Versetzung. Z. B. aaa oder aaaa.
2) Sind einige Elemente, z. B. unter 4 Elementen 2 gleiche, bbcd, so lassen die gleichen Elemente nur eine Darstellung zu; wären sie verschieden, so würden sie 2 zulassen,

es kann also jetzt die Anzahl der Permutationen nur mehr die Hälfte der vorigen oder $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 12$ sein. Dieß läßt sich leicht so einsehen:

bbcd	Ordnung b fällt weg	cbbd	dbbc
bbdc		cbdb	dbcb
bcbd		.	.
bcdb		.	.
bdbc		cdbb	dcbb
bdcb		.	.

Wären unter 4 Elementen 3 Gleiche z. B. cccd, so hätte man:

cccd	dccc	die beiden übrigen Ordnungen fallen weg.
ccdc	.	
.	.	
.	.	
cdcc	.	
.	.	

Bedenkt man, daß 3 Elemente $3 \cdot 2 = 6$ Versetzungen geben, so kann bei 4 Elementen von den Versetzungen nur $\frac{1}{6}$ übrig bleiben, oder $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$, wie es die Darstellung nachweist.

Wären zwei und zwei gleiche in 4 El., so hätte man auf gleiche Weise $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$ Versetzungen.

aabb	baab	die übrigen 2 Ordnungen fallen weg.
.	baba	
abab	bbaa	
abba	.	
.	.	
.	.	

Man hat also allgemein, wenn unter m Elementen n und p gleiche sind: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}$ Versetzungen.

328) Nach folgender Regel lassen sich die Permutationen ohne und mit Wiederholungen leicht darstellen:

1) Man ordne die Elementen so, daß auf jedes Element entweder ein gleiches oder ein höheres, nie aber ein niedrigeres folgt, so ist dieß die erste Komplexion.

2) Jede folgende kann man nun aus der vorhergehenden so ableiten:

a) Man gehe von rechts nach links, bis man zu einem Element kommt, das niedriger ist, als das nächstvorhergehende.

b) Für dieses setzt man das unter den Elementen rechts vorkommende nächsthöhere.

c) Die zur linken stehenden Elemente behält man ungeändert bei, wenn solche vorhanden sind.

d) In die zur Rechten des versetzten Elements offenen Stellen schreibt man die noch übrigen Elemente so geordnet, wie in 1) angegeben.

3) Die Komplexion, auf welche sich die Regel 2. nicht mehr anwenden läßt, ist die letzte und zugleich die umgekehrte erste.

Beispiel:

aabbc	baabc	caabb
aabcb	baacb	cabab
aacbb	babac	cabba
ababc	babca	cbaab
abacb	bacab	cbaba
abbac	bacba	cbbaa
abbca	bbaac	
abcab	bbaca	
abcba	bbcaa	
acabb	bcaab	
acbab	bcaba	
acbba	bcbaa	

Nach der Formel (327) muß man erhalten: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}$

$= 30$ Versetzungen und so viele sind es auch nach der Regel.

§. 3.

Verbindungen mit Versetzungen oder Variationen.

329) In den Combinationen hat jede folgende Komplexion andere Elemente, als die übrigen, sie läßt also Versezzungen ihrer Elemente zu, ohne darum mit den übrigen

Komplexionen übereinzukommen. Z. B. die dritte Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen für 4 Elemente gibt, wenn man von jeder Komplexion alle Versetzungen darstellt:

abc acb bac bca cab cba
abd adb bad bda dab dba
acd adc cad cda dac dca
bcd bdc cbd cdb dbc dcb

Die dritte Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen für 3 Elemente gibt, wenn von jeder Komplexion alle Versetzungen dargestellt werden:

aaa
aab aba baa
aac aca caa
abb bab bba
abc acb bac bca cab cba
acc cac cca
bbb
bbc bcb cbb
bcc cbc bcc
ccc

Ohne daß man nöthig hat, diese Versetzungen selbst darzustellen, läßt sich die Anzahl der Komplexionen, die sich im Ganzen ergeben, leicht so berechnen (nach 327).

aaa gibt 1
aab — 3
aac — 3
abb — 3
abc — 6
acc — 3
bbb — 1
bbc — 3
bcc — 3
ccc — 1

27 im Ganzen.

330) Hierdurch wäre die Darstellung der Variationen von den Kombinationen abhängig. Bedenkt man aber, daß in den Variationen mit Wiederholungen jedes Ele-

ment mit jedem auf alle mögliche Weisen (d. h. in jeder möglichen Folge) verbunden werden soll, so findet man

1) die zweite Klasse der Variationen für n Elemente, wenn man vor jedes Element jedes setzt. Dieß gibt aber n^2 Verbindungen. Z. B.

Elemente: 1	2	3	4
aa	aa ab	aa ab ac	aa ab ac ad
	ba bb	ba bb bc	ba bb bc bd
		ca cb cc	ca cb cc cd
			da db dc dd

2) Die 3te Klasse erhält man aus der 2ten dadurch, daß man jeder Verbindung in dieser jedes Element vorsetzt. Dadurch wird aber die Anzahl der Verbindungen in II., welche für n Elemente n^2 ist, mit n multiplicirt, es ist also die Anzahl der Verbindungen in III. für n Elemente: $n \cdot n^2$ oder n^3.

Beispiele:

aaa	aaa	aab	aaa	aab aac
	aba	abb	aba	abb abc
	baa	bab	aca	acb acc
	bba	bbb	baa	bab bac
			bba	bbb bbc
			bca	bcb bcc
			caa	cab cac
			cba	cbb cbc
			cca	ccb ccc

3) Die vierte Klasse erhält man aus der 3ten dadurch, daß man allen Komplexionen in III. jedes Element vorsetzt. Für n Elemente wird also die Anzahl der Verbindungen in III. mit n multiplicirt, man erhält also in der IV. Variationsklasse für n Elemente $n \cdot n^3 = n^4$ Complexionen.

Beispiele:

aaaa	aaaa	aaab	baaa baab
	aaba	aabb	baba babb
	abaa	abab	bbaa bbab
	abba	abbb	bbba bbbb

4) Man sieht, daß die mte Variationsklasse mit Wiederholungen für n Elemente n^m Komplexionen enthält.

Anmerk. Damit stimmt die oben angeführte Berechnung aus den Kombinationen mit Wiederholungen überein, welche für 3 Elemente in der dritten Klasse 27 oder 3^3 Verbindungen gab.

331) Die Variationen ohne Wiederholungen verlangen alle mögliche Verbindungen jedes Elements mit jedem (außer mit sich selbst) auf alle mögliche Weisen dargestellt.

1) Die 2te Klasse erhält man also, wenn man jedem Element jedes andere vorsetzt. Dadurch gibt es aber bei n Elementen n (n — 1) Verbindungen. Z. B. für 3 Elemente 3 (3 — 1)

— ab ac
ba — bc
ca cb —

2) Die 3te Klasse erhält man dadurch, daß man jeder Verbindung in II. jedes Element vorsetzt, diejenigen Verbindungen aber übergeht, worin es selbst vorkommt. Nun kommt jedes Element in II. in 2 (n — 1) Verbindungen vor; so viele werden bei jedem Element übergangen: also im Ganzen 2n (n—1); außerdem wären es nn (n—1), somit bleiben nn (n—1) — 2n (n—1) = n (n—1) (n—2)
z. B. für 3 Elemente: 3 (3—1) (3—2) = 6

— — —
— — abc
— acb —
— — bac
— — —
bca — —
— cab —
cba — —
— — —

3) Die 4te Klasse erhält man dadurch, daß man jeder Verbindung in III. jedes Element vorsetzt mit Uebergehung derjenigen Verbindungen, worin dieses Element enthalten ist. Nun kommt jedes Element in der 3ten Klasse

in $3(n-1)(n-2)$ Verbindungen vor; diese n mal genommen, geben, $3n(n-1)(n-2)$ wegfallende Verbindungen und man hat also $n \cdot n(n-1)(n-2) - 3n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)$ Verbindungen.

Man sieht also, daß die mte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen für n Elemente $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-[m-1])$ Komplexionen hat, wobei m nicht größer werden darf als n.

332) Da die Kombinationen ohne Wiederholungen nichts anderes sind, als die Variationen ohne Wiederholungen und Versetzungen, so findet man die mte Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen aus der mten Klasse der Variationen ohne Wiederholungen, wenn man diese durch die Zahl dividirt, welche anzeigt, wie viel Versetzungen jede Komplexion dieser Klasse zuläßt. Diese ist aber für die mte Klasse $1.2.3\ldots m$ also hat man wie oben, als Anzahl der Komplexionen in der mten Kombinationsklasse ohne Wiederholungen:

$$\frac{n[n-1][n-2]\ldots\ldots(n-[m-1])}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

§. 4.

Anwendungen.

333) Eine Zahlenlotterie von 90 Nummern hat 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen, die 5 gezogenen Nummern lassen zu: 10 Amben, 10 Ternen, 5 Quaternen. Es ist also die Wahrscheinlichkeit eine Ambe zu errathen zu der Wahrscheinlichkeit sie zu fehlen $= 10 : 4005 = 2 : 801$, bei der Terne $= 10 : 117480 = 1 : 11748$, bei der Quaterne $= 5 : 2555190 = 1 : 511038$, d. h. bei der Ambe muß man unter 400 Fällen, bei der Terne unter 11748, bei der Quaterne unter 511038 einen errathen. Setzt man auf eine einfache Zahl (Auszug) so kommen 5 heraus, während die Lotterie 90 enthält: hier ist also die Wahrscheinlichkeit zu verlieren gegen die zu gewinnen wie $90 : 5 = 18 : 1$

Ist die Lotterie völlig gerecht eingerichtet und kein Vortheil auf Seite des Lotterie-Unternehmers, so muß der Einsatz über Abzug der Verwaltungskosten dem Gewinn gleich sein. Denkt man sich nämlich

alle Auszüge, Amben, Ternen und Quaternen besetzt, so würde von 90 Auszügen der Einsatz einkommen; dieser müßte sich auf die 5 Auszüge, welche in den 5 gezogenen Nummern herauskommen, als Gewinn vertheilen, wodurch auf jeden Auszug das 18 fache des Einsatzes als Gewinn käme.

Von 4005 Amben vertheilte sich der Einsatz auf die 10 gezogenen Amben als Gewinn, somit wäre hier der Gewinn $400\frac{1}{2}$ mal so groß als der Einsatz.

Von den 117480 Ternen vertheilte sich der Einsatz als Gewinn unter die 10 gezogenen Ternen: hier wäre also der Gewinn 11748 mal so groß als der Einsatz.

Von den 2555190 Quaternen erhielten die 5 gezogenen Quaternen den Gesammteinsatz als Gewinn; somit wäre der Gewinn einer Quaterne 511038 mal so groß als der Einsatz.

Nur wenn nach diesem Verhältniß die Gewinnste gezahlt werden, ist die Lotterie für den Unternehmer nicht vortheilhafter als für die Spieler. Ueberhaupt kann man zur Beurtheilung aller Wagspiele den Grundsatz aufstellen, daß sie nur dann gerecht sind, wenn der Gewinn sich zum Einsatz verhält, wie die Wahrscheinlichkeit zu verlieren zu der zu gewinnen.

Anmerk. Das öffentliche Lotto ist nicht darum zu tadeln, daß es den Gewinn schmälert, um dem Staat Einkommen zu verschaffen; vielmehr wird vielleicht keine Steuer so willig entrichtet, als diese durch das Lotto von den Gewinnern erhobene: sondern deßhalb, weil es der unbemittelten Klasse des Volks Gelegenheit gibt, an einem Spiele Theil zu nehmen, bei welchem die Wahrscheinlichkeit zu verlieren zu bedeutend ist gegen die zu gewinnen, so daß immer Viele sich zu Grunde richten, bis Einer durch Gewinn sich aufhilft.

334) Im Würfelspiel bestimmt sich die Anzahl der möglichen Würfe nach den Variationen mit Wiederholungen, so daß also mit n Würfeln 6^n die Anzahl der Würfe ist.

Für 3 Würfel hat man $6^3 = 216$ Würfel, und die Wahrscheinlichkeit 3 bestimmte gleiche Seiten, z. B. 1, 1, 1 der Würfel oben zu haben ist $= 216 : 1$, 3 bestimmte ungleiche aber $= 216 : 6 = 36 : 1$

Für 6 Würfel ist die Zahl der Würfe $6^6 = 46656$. Die Wahrscheinlichkeit 6 bestimmte gleiche Zahlen zu treffen ist $= 46656 : 1$;

dagegen für 6 bestimmte ungleiche $=$ 46656 : 180 $=$ 1296 : 5; für 6 bestimmte Zahlen, unter welchen 3 gleiche $=$ 46656; 30 $=$ 7776 : 5

Vier Buchstaben können auf wie viel Arten zusammengesetzt werden?

Wie viel Quinen enthält eine Lotterie von 90 Nummern? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Quine zu errathen, wenn 5 Nummern gezogen werden?

Wie viel Amben, Ternen, Quaternen sind in 60 Nummern enthalten?

Auf wie viel Arten läßt sich das Product 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17 erzeugen, wenn man annimmt, daß immer das Product der vorhergehenden Factoren mit dem nächstfolgenden multiplicirt werde?

Auf wie viel Arten aber 2. 2. 3. 3. 5. 7.?

Neunter Abschnitt.

Von den geometrischen Progressionen.

333) Multiplicirt man eine Zahl a mit einer andern p, das Produkt ap mit derselben p, dieses Product ap^2 abermals mit p . ., so erhält man eine Zahlreihe, die man geometrische Reihe oder Progression nennt; ihr ntes Glied ist ap^{n-1}

$$a \quad ap \quad ap^2 \quad ap^3 \ldots\ldots ap^{n-1}$$

$$\text{z. B. } 3 \quad 3.2 \quad 3.2^2 \quad 3.2^3 \ldots\ldots 3.2^{n-1}$$

$$\text{oder } 3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \ldots\ldots$$

$$1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \ldots\ldots \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$7 \quad \frac{7.2}{5} \quad \frac{7.2^2}{5^2} \quad \frac{7.2^3}{5^3} \ldots\ldots \frac{7.2^{n-1}}{5^{n-1}}$$

a nennt man das erste Glied, p den Exponenten der Reihe.

334) Man sieht, daß jedes Glied aus dem nächst folgenden entsteht, wenn man dieses mit dem Exponenten dividirt. z. B.

$$\frac{3.2^3}{2} = 3.2^2$$

Bezeichnet man das nte oder allgemeine (letzte) Glied mit t, so ist

$$t = ap^{n-1}$$

d. h. das letzte Glied einer geometrischen Progression ist gleich dem Exponenten zur Potenz der Anzahl der Glieder weniger eins erhoben, multiplicirt mit dem ersten Glied. Beisp. das 10te Glied der Reihe 3, 6, 12 . . . ist also $3 . 2^9 = 3 . 512 = 1536$.

335) Bezeichnet man durch S die Summe von n Gliedern der Progression

oder I) $S = a + ap + ap^2 + \ldots + ap^{n-1}$

so ist II) $pS = \quad ap + ap^2 + \ldots + ap^{n-1} + ap^n$

also wenn man die Seiten der Gleichung I. von denen der Gleichung II. abzieht:

$$S(p-1) = ap^n - a$$

$$\text{daher } S = \frac{ap^n - a}{p-1} = \frac{a(p^n-1)}{p-1}$$

1. Beisp. 7 Glieder der Reihe 3, 6, 12 . . . geben zusammen: $\frac{3(2^7-1)}{2-1} = 3 . 127 = 381$

Es ist auch: $3+6+12+24+48+96+192 = 381$.

2. Beisp. 9 Glieder der Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ geben zur Summe $\frac{1(\frac{1}{2}^9-1)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{5}\frac{1}{1}\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{-\frac{5}{5}\frac{1}{1}\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{6} = 1\frac{2}{2}\frac{5}{5}\frac{5}{6}$.

336) Aus den beiden Gleichungen

$$\text{I) } t = ap^{n-1}$$

$$\text{und II) } S = \frac{ap^n - a}{p-1} = \frac{a(p^n-1)}{p-1}$$

$$\text{folgt III) } S = \frac{pt - a}{p-1}$$

Aus der letzten Gleichung hat man

$$pS - S = pt - a$$

$$pS - pt = -a + S$$

$$p = \frac{S-a}{S-t}$$

setzt man dieß in 1) so erhält man:

$$\text{IV)}\ \frac{t}{a} = \left(\frac{S-a}{S-t}\right)^{n-1}$$

Aus I) erhält man $a = \frac{t}{p^n - 1}$,

aus II) erhält man $a = \frac{(p-1)S}{p^n - 1}$

also V) $\frac{t}{p^n - 1} = \frac{(p-1)S}{p^n - 1}$

Aus diesen 5 Gleichungen lassen sich, wenn 3 von den 5 Größen a, p, n, t, s gegeben sind, die 2 übrigen bestimmen, die Fälle ausgenommen, wo die Gleichungen höhern Graden angehören.

I) Aus Gleichung I. hat man nämlich:

$$1)\ a = \frac{t}{p^n - 1},\quad 2)\ t = ap^n - 1,\quad 3)\ p = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$4)\ \log t - \log a = (n-1)\log p,\ \text{also}\ n = \frac{\log t - \log a}{\log p} + 1$$

II) Aus Gleichung II.

$$1)\ S = \frac{a(p^n - 1)}{p-1},\quad 2)\ a = \frac{S(p-1)}{p^n - 1}$$

$$3)\ p^n = \frac{(p-1)S}{a} + 1,\ \text{also}$$

$$n \log p = \log([p-1]S + a) - \log a$$

$$n = \frac{\log([p-1]S + a) - \log a}{\log p}$$

4) p macht, wenn $n > 2$, die Auflösung einer Gleichung von höhern Graden nöthig, als hier gelehrt worden ist.

III) Aus Gleichung III. folgt:

$$1)\ S = \frac{pt - a}{p-1},\quad 2)\ a = pt - (p-1)S$$

$$3)\ p = \frac{S-a}{S-t},\quad 4)\ t = \frac{(p-1)S + a}{p}$$

IV) Aus Gleichung IV.

$$1)\ \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{S-a}{S-t},\ \text{also}$$

$$S \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - S = t\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - a$$

$$t\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - a \qquad t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\text{Daher } S = \frac{}{\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1} = \frac{}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

2) a und 3) t führen auf höhere Gleichungen.

$$4)\ \frac{\log t - \log a}{n-1} = \log (S-a) - \log (S-t)$$

$$\text{also } \frac{\log t - \log a}{\log (S-a) - \log (S-t)} + 1 = n$$

V) Aus Gleichung V.

$$1)\ t = \frac{(p-1)\,p^{n-1}S}{p^n - 1}, \qquad 2)\ S = \frac{(p^n-1)\,.\,t}{(p-1)\,p^{n-1}}$$

3) p führt auf eine höhere Gleichung.

$$4)\ tp\,.\,p^{n-1} - t = (p-1)\,S\,.\,p^{n-1}$$

$$(tp - [p-1]\,S)\,p^{n-1} = t$$

$$p^{n-1} = \frac{t}{tp - (p-1)\,S}$$

$$(n-1)\log p = \log t - \log (pt - [p-1]\,S)$$

$$n = \frac{\log t - \log (pt - [p-1]\,S)}{\log p} + 1$$

Beispiele zur Uebung.

1) Was ist das letzte Glied einer geometrischen Progression von 12 Gliedern, deren erstes Glied 2, der Exponent 3 ist?

2) Das letzte Glied sei 492075, der Exponent 3, die Anzahl der Glieder 10, was ist das erste Glied?

3) Das erste Glied sei 1, die Anzahl der Glieder 9, das letzte 3359232 was ist der Exponent?

4) Das erste Glied sei 3, der Exponent 5, das letzte Glied 9375, wie viel Glieder sind es?

5) Das erste Glied sei 2, der Exponent 3, das letzte Glied 86093442 was ist die Summe?

6) Das erste Glied sei 2, der Exponent 7, die Anzahl der Glieder 7, was ist die Summe?

7) Der Erfinder des Schachbretts verlangte von seinem Könige als Belohnung für das erste von den 64 Feldern des Schachbretts 1 Waizenkorn, für jedes folgende das doppelte von dem, was für das vorhergehende gegeben worden, wie viel Waizenkörner verlangte er?

8) Jemand setzt 4 kr. in's Lotto und will 12 mal dupliren, wie viel muß er das letzte mal gewinnen, wenn er seinen ganzen Einsatz zurückerhalten soll?

9) Einer sät eine Metze Waizen aus, was er ärntet sät er im 2ten Jahre wieder ganz aus und so fort, wenn er nun im 8ten Jahre 2187 Metzen ärntet, wie vielfach ersetzte sich jährlich die Aussaat?

Anmerk. Es bedarf kaum der Ermähnung, daß nicht blos da, wo selbst die allgemeine Formel nur durch Logarithmen möglich ist, Logarithmen gebraucht werden können, sondern überall, wo Potenzen und Wurzeln die Rechnung erschweren.

Zehnter Abschnitt.

Von Zinseszinsen, Renten ꝛc.

337) Die manchfaltigen Fragen, welche beim einfachen Zins (der nicht wieder ausgeliehen wird) vorkommen können, sind größtentheils schon oben beantwortet worden (277. und 311). Hier soll noch erwogen werden, welche Aufgaben gestellt werden können, wenn der Zins, den man alljährlich erhält, selbst als Kapital ausgeliehen (zum Kapital geschlagen), neuen Zins bringt, den man eben daher Zinseszins nennt.

Ist a ein Kapital, das p fl. von jedem Hundert oder $\frac{p}{100}$ von seinem Betrag alljährlich Zins trägt, so ist der Zins in 1 Jahre $= a \cdot \frac{p}{100}$; Kapital nebst Zins ist also am Ende des ersten Jahres $a + a\frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Diese ganze Summe ist das Kapital, das im zweiten Jahre ausgeliehen zu $\frac{p}{100}$

Zins trägt: $a\left(1+\frac{p}{100}\right).\frac{p}{100}$. Dazu das Kapital selbst, das am Anfang des 2ten Jahres ausgeliehen wurde, so hat man $a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=$ $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$. Man sieht hieraus leicht, daß am Ende des 1, 2, 3 . . . nten Jahres sich das um seinen Zins vermehrte Kapital auf folgende Art berechnet:

I) $a+a\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)$

II) $a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=$ $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$

III) $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{p}{100}\right)$ $=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$

IV) $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3+a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\left(1+\frac{p}{100}\right)$ $=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$

⋮

N) $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

das heißt, wenn ein Kapital a n Jahre lang zu p Procent auf Zinseszinsen aussteht, so beträgt es am Ende des nten Jahres sammt seinen Zinsen $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Die Zinsen allein machen also: $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-a$ oder $a\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n-1\right)$. Bezeichnet man also den Zins mit z, so ist $z=a\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n-1\right)$

Anmerk. Aehnliche Verhältnisse, wie bei den Zinseszinsen, treten bei andern Größen ein, z. B. bei der Zunahme der Bevölkerung eines Landes, das hinreichende Vermehrung der Erwerbsquellen der zunehmenden Bevölkerung darbietet. Die Gebornen vermehren dann im bestimmten Verhältniß die Lebenden; diese Vermehrung vermehrt sich wieder und so fort. Vermehrt sich also die Bevölkerung jährlich

um p auf 100, so ist sie für a Volksmenge am Ende des ersten Jahres $a + a\frac{p}{100}$, wie beim Zinseszins.

338) Heißt der ganze Endbetrag w, so ist

$$\text{I)}\quad a\left[1+\frac{p}{100}\right]^n = w$$

Nach dieser Formel lassen sich folgende Aufgaben lösen:

a) wenn w gesucht wird.

1) Ein Kapital von 5000 fl. steht auf Zinseszinsen zu 4 pct., was wird daraus nach 40 Jahren?
A. $5000\,(1+\frac{4}{100})^{40} = 5000 \cdot 1{,}04^{40} = 24005{,}1\ldots$ fl.
(Berechnung mit Logarithmen.)

2) Ein Kapital von 8700 fl. wird zu 5 pct. ausgeliehen nach 16 Jahren 18991 fl.

3) In einer Provinz zählt man 200000 Menschen; wenn nun die Bevölkerung jährlich um 2 pct. zunimmt, wie groß wird sie nach 10 Jahren sein?

b) wenn a gesucht wird.

Hat ein Kapital in n Jahren zu p pct. mit Zinseszinsen w fl. getragen, wie viel beträgt es?

Man hat $x\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = w$ also

$$x = \frac{w}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

$$\text{oder } \log x = \log w - n \log\left[1+\frac{p}{100}\right]$$

diese Aufgabe enthält die Berechnung des strengen Rabatts oder Disconto im engern Sinne. (s. 278).

1) Jemand hat nach 8 Jahren 4000 fl. zu zahlen, wie viel ist er schuldig baar zu geben, wenn der Rabatt nach Zinseszinsen zu 5 pct. berechnet wird?

2) Wie viel nach 3 und 5 Jahren?

3) Ein Morgen Wald wird nach 20 Jahren abgeholzt 500 fl. Nutzen abwerfen, wie hoch darf man das Recht, ihn nach 20 Jahren abzuholzen, baar kaufen, damit das darauf angelegte Kapital 4 pct. Nutzen abwirft? A. 228 fl.

4) Auf ein Grundstück geschehen 3 Angebote: 3000 fl. nach 2 Jahren ohne Zinsen, 5000 fl. nach 12 Jahren ohne Zinsen oder 6650 fl. baar, welches ist das vortheilhafteste, wenn man von den beiden ersten den Rabatt zu 5 pct. als Zinseszins abzieht?

c) wenn n gesucht wird.

a fl. Kapital geben in wie viel Jahren zu p pct. mit Zinseszinsen w fl.?

Man hat: $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^x = w$

Daher $x \log\left(1+\frac{p}{100}\right) = \log w - \log a$

oder $x = \frac{\log w - \log a}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$

1) Wenn 3836⅘ fl. mit Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$ pct. $4132\,41\frac{1}{2}$ fl. geben sollen, wie lang müssen sie ausstehen? A. 54 J.

2) Wenn man für ein Kapital von 5000 fl., das nach mehrern Jahren zu zahlen ist, bei 5 pct. Rabatt nach Zinseszinsen 3500 fl. baar bietet, nach wie viel Jahren ist es zu zahlen?

3) Wenn 2000 fl. mit Zinseszinsen zu 3 pct. auf 3500 fl. angewachsen sind, wie lang standen sie aus?

Hierher gehören folgende besondere Fälle:

In wie viel Jahren beträgt ein Kapital a zu p pct. mit Zinseszinsen das mfache seiner selbst?

Man hat: $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^x = ma$

hieraus $\left(1+\frac{p}{100}\right)^x = m$

$$x = \frac{\log w - \log a}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Z. B. In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital zu 5, 4, 3, 2 pct.?

d) wenn die Procente unbekannt sind.

Wenn a Kapital in n Jahren w fl. mit Zinseszinsen gaben, wie groß waren die jährlichen Procente?

Es ist $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^n = w$

$$\text{oder } n \log\left(1+\frac{x}{100}\right) = \log w - \log a$$

$$\text{daher } \log\left(1+\frac{x}{100}\right) = \frac{\log w - \log a}{n}$$

Hat man auf diese Weise $1+\frac{x}{100} = m$, so findet man

$$x = (m-1) \cdot 100.$$

1) Ein Kapital von 600 fl. vermehrte sich mit Zinseszinsen in 3 Jahren auf 800, wie viel Procent wurden genommen? A. Ohngefähr 10.

2) Wenn für 6000 fl. die nach 10 Jahren zu zahlen sind, 4000 fl. baar verlangt werden, wie ist der Zinsfuß bei Zinseszinsen gerechnet?

II. Denkt man sich den Jahreszins eines Kapitals durch Zinseszinsen entstanden, die nach gleichen Theilen des Jahres zu entrichten waren, so kann man fragen, wie viel betragen die viertel-, halb- und jährlichen Zinsen, wenn die jährlichen 5 pct. betragen? Oder allgemein:

$$a\left[1+\frac{x}{100}\right]^n = a\left[1+\frac{a}{100}\right]$$

$$1+\frac{x}{100} = \sqrt[n]{1+\frac{a}{100}}$$

$$x = 100\left[\sqrt[n]{1+\frac{a}{100}} - 1\right]$$

III. Von dieser nur selten vorkommenden Frage ist wohl zu unterscheiden die Aufgabe, den Zinseszins nicht blos auf eine runde Summe von Jahren, sondern auf ein Theiljahr am Ende zu berechnen.

Fragt man, wie viel das Kapital a nach n und $\frac{m}{q}$ Jahren zu p pct. mit Zinseszinsen betrage, so hat man erstlich am Ende des nten Jahres $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. Dieß wird abermals ausgeliehen; steht aber kein ganzes Jahr, sondern nur $\frac{m}{q}$ Jahr. Der Zins p, den 100 fl. in 1 Jahr geben, wird also in $\frac{m}{q}$ Jahr nur $\frac{mp}{q}$ und man hat am Ende dieses Theiljahres

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{mp}{q \cdot 100} = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\left(1+\frac{mp}{q \cdot 100}\right)$$

Beispiele:

1) Ein Kapital von 3850 fl. hat mit Zinseszinsen zu 5 pct. nach 9 J. 5 Monaten den Werth von:

2) Was betragen 2700 fl. nach 5½ J. zu 5 pct. Zinseszinsen?

3) Wenn 800 fl. nach 4¾ J. zu zahlen sind, und man 6 pct. Rabatt, nach Zinseszinsen berechnet, wie viel hat man baar zu zahlen?

5 pct.

A. $800 = x \,.\, 105^4 \,.\, \frac{415}{400}$

$$\frac{400 \,.\, 800}{415 \,.\, 105^4} = x = \frac{320000}{415 \,.\, 105^4}$$

IV. Werden die Zinsen halbjährlich, vierteljährlich ꝛc. ausgezahlt, so können sie stets früher zum Kapital geschlagen werden, als dieß bei der jährlichen Zahlung möglich gewesen wäre; sie tragen also auch mehr Zins und das Kapital vermehrt sich auf diese Weise weit schneller.

Ein Kapital a zu 5 pct. wird mit Zinseszinsen in n Jahren bei vierteljährlicher Zahlung

$$a\left(1+\frac{5}{400}\right)^{4n}$$

denn es tritt ganz das Verhältniß ein, daß bei $\frac{5}{4}$ pct. 4mal so viel Zeiträume der Zahlung statt finden.

1) Was wird ein Kapital von 9000 fl. in englischen Staatspapieren, die zu 3 pct. halbjährlich zahlbar verzins't werden, wenn man 20 Jahre lang von den eingehenden Zinsen immer auf's Neue Staatspapiere kauft?

$$9000\left[1+\frac{3}{200}\right]^{40} \text{ oder } 9000 \,.\, 1{,}015^{40}$$

2) Wie lang muß ein Kapital zu 5, 4, 3, 2 pct. verzinslich stehen, um sich zu verdoppeln, wenn die Zinsen halbjährlich gezahlt werden?

3) Zu wie viel Procent sind 4000 fl. ausgeliehen gewesen, wenn sie sich bei vierteljährlicher Zinszahlung in 12 Jahren verdoppelt haben?

4) Einer hat nach 5 Jahren 800 fl. zu zahlen, wie viel ist der baare Werth, wenn der Rabatt nach 5 pct. Zinseszinsen halbjährlich zahlbar abgezogen wird?

V. Zusammengesetzte Aufgaben.

a Kapital zu p Procent kann in n Jahren um A mehr oder weniger werden als a' Kap. zu p' Pct. in n' Jahren. Dann hat man

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = a'\left(1+\frac{p'}{100}\right)^{n'} \pm A$$

Ist $A = 0$, so sind beide Endsummen gleich. Hiernach lassen sich folgende Aufgaben auflösen.

1) Wie groß ist ein Kapital, das in 5 J. zu 5 pct. mit Zinseszinsen eben so hoch anwuchs, als 1000 fl. in 10 J. zu 3 pct.?

2) Wie lang müssen 800 fl. zu $4\frac{1}{2}$ pct. ausstehen, um eben so viel zu geben, als 900 fl. zu 3 pct. in 6 Jahren?

3) Zu wie viel pct. muß man 1800 fl. ausleihen, damit sie in 5 J. eben so viel mit Zinseszinsen geben, als 2000 fl. in $4\frac{1}{2}$ Jahren?

VI. Berechnung der Veränderungen eines Kapitals, das in gleichen Zeiträumen gleichmäßig zu- oder abnimmt, während es Zinseszinsen trägt.

a) Von der einfachen Rente.

Unter Rente (Zeitrente) wird eine Geldsumme verstanden, die in gleichen Terminen bezogen wird. Die Verbindlichkeit eine Rente zu entrichten, kann aus manchfaltigen Veranlassungen hervorgehen. Wird ein Kapital hingegeben, um sich in bestimmten Terminen den Genuß einer Rente zu verschaffen, so heißt dieß die Mise.

Wird eine Rente r n Jahre hindurch am Ende jedes Jahres gezahlt, so ist sie jedesmal als ein dem Empfänger bezahltes Kapital zu betrachten, das er auf Zinseszinsen ausleihen könnte. Thut er dieses, so trägt ihm das erste r bis zum Ende des n ten Jahres noch $n - 1$ Jahre lang Zins zu p Prct., lauft also mit Zinseszinsen auf $r\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n-1}$ an. Die Rente des 2ten Jahres kann er $n - 2$ J. ausleihen; sie wird also am Ende des n ten Jahres mit Zinseszinsen $r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}$ u. s. f. Die Rente des vorletzten Jahres trägt noch im nten Jahre Zins; ist also am Ende des nten Jahres $r\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Die Rente des nten Jahres ist r selbst. Im Ganzen beträgt die Summe aller Renten am Ende des nten Jahres:

$$r + r\left(1+\frac{p}{100}\right) + r\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + \ldots + r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2} + r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$$

Dieß ist aber eine geometrische Reihe von n Gliedern, deren erstes Glied r, der Exponent $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ ist. Man hat also nach (335) als Summe:

$$\frac{r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n-1\right)}{\left(1+\frac{p}{100}\right)-1} \text{ oder } \frac{100\,r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n-1\right)}{p}$$

Nennt man nun den baaren Werth der Rente a, so muß dieß am Ende des nten Jahres mit Zinseszinsen zu p pct. eben so viel als die Rente betragen; es ist also:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = \frac{100\,r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n-1\right)}{p}$$

1) Die Mise a findet man also, wenn r gegeben,

$$\log a = \log 100r + \log\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n-1\right) - \log p - n\log\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

2) Umgekehrt die Rente r erhält man

$$\log r = \log a + n\log\left(1+\frac{p}{100}\right) + \log p - \log\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n-1\right) - 2$$

3) Fragt man, wie lang die Rente r für die Mise a bezogen werden könne, wenn man p als Procente nimmt, so kommt:

$$n = \frac{\log r + 2 - \log(100r - ap)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Beispiele:

1) Was ist der baare Werth einer Jahrrente von 500 fl., die 18 Jahre lang ausgezahlt wird, beim Zinsfuß 5 pct.?

2) Wenn man 10000 fl. gibt, um 20 J. hindurch eine Jahrrente zu beziehen, wie groß ist diese, wenn der Zinsfuß $\frac{4}{100}$ ist?

3) Wenn 3000 fl. gezahlt werden, damit man eine Jahrrente von 400 fl. beziehe; wie lang lauft sie, wenn bei der Berechnung 5 pct. Zins zum Grunde liegt?

Man hat: $n = \frac{\log 40000 - \log(40000 - 15000)}{\log 1{,}05}$

$\log 40000 = 4{,}60206$
$\log 25000 = 4{,}39794$
$0{,}20412$
$\log 1{,}05 = 0{,}02119$
also $n = \frac{20412}{2119} = 9{,}633$

Die Jahrestheile über 9 Jahre 0,633 sind so zu verstehen, daß im 10ten Jahre nur 0,633 . 400 fl. = 253,2 fl. gezahlt wird. Denn berechnet man den baaren Werth auf 9 Jahre, so ist er:

$$a = \log 40000 + \log (1{,}05^9 - 1) - [\log 5 + 9 \log 1{,}05]$$

$\log 40000$	$=$	4,60206
$\log (1{,}05^9 - 1)$	$=$	0,74162 − 1
		4,34368
$\log 5$	$=$	0,69897
$9 \log 1{,}05$	$=$	0,19071
		0,88968
		3,45400
$a = 2844{,}5$		393 diff. 15
		7

Dazu der baare Werth von 253,2 fl. nach 10 Jahren zahlbar:

$$a' = \frac{253{,}2}{1{,}05^{10}} \quad \text{also} \quad \log a' = \log 253{,}2 - 10 \log 1{,}05$$

$\log 253{,}2$	$=$	2,40346
$10 \log 1{,}05$	$=$	0,21190
		2,19156
$a' = 155{,}44$		diff. 28
		47
		9

Also $a + a' = 2844{,}5 + 155{,}44 = 2999{,}94$, was mit der Mise von 3000 fl. hinreichend genau übereinkommt.

b) Besondere Bedingungen, unter welchen die Rente gezahlt wird.

1) Eine Rente von r fl. am Ende jedes Jahres zahlbar, wurde für a fl. zu p Prct. gekauft, wie viel ist nach n Jahren von der Mise übrig? Oder allgemeiner: Ein Kapital a zum Zinsfuß p auf Zinseszinsen ausgeliehen, wird am Ende jedes Jahres um dieselbe Simme r vermindert oder vermehrt, wie viel beträgt es nach n Jahren?

Das Kapital selbst beträgt am Ende des nten Jahres $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$; die Vermehrung oder Verminderung

$$\frac{100\,r\left(\left[1 + \frac{p}{100}\right]^n - 1\right)}{p}$$

folglich beträgt es im Ganzen:

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \pm \frac{100\,r\left(\left[1 + \frac{p}{100}\right]^n - 1\right)}{p} = a'$$

Hieraus lassen sich auch folgende Aufgaben lösen:

1) Wenn aus einem Kapital a, das auf Zinseszinsen zu p Pct. ausſteht und alljährlich um r vermehrt oder vermindert wird, a′ werden ſoll, wie lang darf es ausſtehen? A. Sucht man in voriger Formel n, wenn a′ gegeben, ſo iſt:

$$(pa \pm 100r)\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = pa' \pm 100a$$

$$\text{alſo } n = \frac{\log(pa' \pm 100a) - \log(pa \pm 100r)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Fragt man, nach wie viel Jahren das Kapital a aufgezehrt ſei, ſo wird $a' = 0$ und man hat, wie oben

$$n = \frac{\log 100r - \log(pa - 100r)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

2) Wenn ein Kapital a zu p Prct. ausgeliehen, mit Zinseszinſen vermehrt wird, jährlich aber eine ſolche Summe von ihm weggenommen werden ſoll, daß nach n Jahren a′ übrig iſt, wie groß iſt dieſe Summe?

$$r = \frac{\left(a\left[1+\frac{p}{100}\right]^n - a'\right)p}{100\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n - 1\right)}.$$

3) Wenn eine Rente r n Jahre hindurch genoſſen wurde, dann aber dem Rentirer a′ von der Miſe zurückgegeben wurde, wie viel hat dieſe betragen bei p Pct. Zinſen?

$$a = \frac{pa' + 100r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n - 1\right)}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

2) Wird eine Jahrrente mit einer andern verglichen und ſollen ſie an baarem Werth einander gleich ſein, ſo iſt der baare Werth der einen, wenn ſie jährlich r beträgt, n Jahre dauert und zu p Pct. berechnet wird =

$$\frac{100r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n - 1\right)}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

iſt die andere r′, dauert ſie n′ Jahre zu p Pct., ſo iſt ihr baarer Werth

$$\frac{100\,r'\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n'}-1\right)}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n'}}, \text{ also:}$$

$$\frac{100\,r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-1\right)}{p\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}} = \frac{100\,r'\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n'}-1\right)}{p\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n'}}$$

$$r = \frac{r'\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n'}-1\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-n'}}{\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-1}$$

3) Wie groß ist die gesuchte Jahrrente r dann, wenn sie erst nach m Jahren zum erstenmal bezahlt wird?

A. Ist ihr baarer Werth am Ende des mten Jahres oder am Anfang des Jahres, wo ihre erste Zahlung beginnt,

$$\frac{100\,r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-1\right)}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}}$$

so ist jetzt der baare Werth dieses Betrags, den Rabatt auf m Jahre gerechnet:

$$\frac{100\,r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-1\right)}{p\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n+m}}$$

$$\text{also } r = \frac{r'\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n'}-1\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n+m-n'}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}-1}$$

4) Was ist der baare Werth einer Jahrrente, welche in jedem folgenden Jahre das efache des vorjährigen Betrags ist und n Jahre dauert, wenn man den Zins zu p Pct. berechnet? Dann bilden die Renten mit ihren Zinseszinsen bis zum Ende des nten Jahres folgende geometrische Reihe:

I. II. III. . . . . N−1 N

$$r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+re\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+re^{2}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-3}+\ldots\ldots$$

$$re^{n-2}\left(1+\frac{p}{100}\right)+re^{n-1} =$$

$$re^{n-1}\left(\frac{1+\frac{p}{100}}{e}\right)^{n-1}+re^{n-1}\left(\frac{1+\frac{p}{100}}{e}\right)^{n-2}+re^{n-1}\left(\frac{1+\frac{p}{100}}{e}\right)^{n-3}+\ldots.$$

$$re^{n-1}\left(\frac{1+\frac{p}{100}}{e}\right)+re^{n-1}=$$

$$re^{n-1}\frac{\left(\left[\frac{1+\frac{p}{100}}{e}\right]^{n}-1\right)}{\frac{1+\frac{p}{100}}{e}-1}=\frac{r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-e^{n}\right)}{\left(1+\frac{p}{100}\right)-e}$$

5) Wäre der baare Werth einer Jahrrente r auf n Jahre zu berechnen, die so laufen soll, daß jedes folgende Jahr sich die Rente um eine gewisse Summe d vermehrt oder vermindert (wornach also die Rente eine arithmetische Progression bildet), so hätte man als den Endwerth der Rente:

$$r\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{n-1}+(r+d)\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{n-2}+(r+2d)\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{n-3}+\ldots.$$

$$(r+[n-2]\,d)\left(1+\tfrac{p}{100}\right)+r+(n-1)\,d$$

Oder, wenn man zur Abkürzung $1+\frac{p}{100}=p$ setzt,

$$rp^{n-1}+(r+d)\,p^{n-2}+(r+2d)\,p^{n-3}+\ldots.\,(r+[n-2]\,d)\,p+r+(n-1)\,d=$$

$$rp^{n-1}+rp^{n-2}+rp^{n-3}+\ldots.+rp+r=\frac{r(p^{n}-1)}{p-1}$$

$$+dp^{n-2}+dp^{n-3}+\ldots\ldots dp+d=\frac{d(p^{n-1}-1)}{p-1}$$

$$+dp^{n-3}+\ldots\ldots dp+d=\frac{d(p^{n-2}-1)}{p-1}$$

$$\vdots\qquad\vdots$$

$$+dp+d=\frac{d(p^{n-[n-2]}-1)}{p-1}$$

$$+d=\frac{d(p^{n-[n-1]}-1)}{p-1}$$

Diese Summen in der Vertikalreihe rechts lassen sich so darstellen:

$$\frac{d}{p-1}\left(p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+\ldots p^{2}+p\right)-\frac{(n-1)d}{p-1}+\frac{r(p^{n}-1)}{p-1}=$$

$$\frac{d}{p-1}\left(p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+\ldots p^{2}+p+1\right)-\frac{nd}{p-1}+\frac{r(p^{n}-1)}{p-1}=$$

$$\frac{d\,(p^{n}-1)}{(p-1)\,(p-1)}-\frac{nd}{p-1}+\frac{r(p^{n}-1)}{p-1}$$ Endbetrag.

Ist also der baare Werth A, so ist

$$Ap^n = \frac{d(p^n-1)}{(p-1)^2} + \frac{r(p^n-1)-nd}{p-1} =$$

$$A = \frac{r(p^n-1)(p-1)+d(p^n-1)-dn(p-1)}{(p-1)^2 \cdot p^n}$$

Wäre die Zunnahme jedes Jahres der Rente des ersten Jahres gleich, so hätte man

$$A = \frac{r(p^n-1)\,p-rn\,(p-1)}{(p-1)^2\,p^n}$$

Wäre endlich der baare Werth der unveränderten Jahrrente = w gegeben, so würde, weil $w = \frac{r(p^n-1)}{p-1}$

$$A = \frac{1}{p-1}\left(pw - \frac{rn}{p^n}\right)$$

worin man aber bei der Berechnung für p setzen muß $1+\frac{p}{100}$.

Vermischte Aufgaben.

1) Einer zahlt 24 Jahre lang in eine Wittwenkasse am Ende jedes Jahres 24 fl.; wie lang kann die Kasse, ohne Nachtheil der Wittwe, eine Rente von jährlich 150 fl. zahlen?

Die Zahlung in die Kasse beträgt am Ende des 24sten Jahres mit 5 procentigen Zinseszinsen:

$$\frac{2400\,(1{,}05^{24}-1)}{5}$$

dieß ist also die Mise. Diese trägt der Kasse bis zum xten Jahre Zins und beträgt dann:

$$\frac{2400\,(1{,}05^{24}-1)\,.\,1{,}05^x}{5}$$

Die Rente beträgt:

$$\frac{15000\,(1{,}05^x-1)}{5}$$ Also:

$$2400\,(1{,}05^{24}-1)\,.\,1{,}05^x = 15000\,.\,1{,}05^x - 15000$$

$$\frac{15000}{15000-2400\,(1{,}05^{24}-1)} = 1{,}05^x,$$ woraus x leicht zu berechnen ist.

2) Was ist der baare Werth einer Rente r, welche alle $\frac{1}{m}$tel Jahre bezahlt wird, p Zins vom Hundert gerechnet in n Jahren?

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = r\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn-1} + r\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn-2} + \ldots\ldots$$

$$r\left(1+\frac{p}{100\,m}\right) + r$$

$$= \frac{100\,mr\left(\left[1+\frac{p}{100\,m}\right]^{mn}-1\right)}{p}$$

$$\text{also } a = \frac{100\,mr\left(\left[1+\frac{p}{m\,.\,100}\right]^{mn}-1\right)}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}}$$

3) Eine alle $\frac{1}{m}$ Jahre n Jahre lang zu zahlende Rente r ist in eine Jahresrente r' zu verwandeln, wie groß ist diese, den Zinsfuß p vom Hundert angenommen?

$$\frac{100r'\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-1\right)}{p} = \frac{100\,mr\left(\left[1+\frac{p}{100\,m}\right]^{mn}-1\right)}{p}$$

$$r' = \frac{mr\left(\left[1+\frac{p}{100m}\right]^{mn}-1\right)}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}-1}$$

Anmerk. Wollte man hier die Berechnung mit noch größerer Genauigkeit machen, so müßte man nach Aufgabe (II.) den Zins berechnen.

Dann wäre der Zins von 100 fl. in $\frac{1}{m}$ Jahr

$$100\left[\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right]$$

wenn p den Zins von 100 fl. in 1 Jahr bezeichnet. Setzt man diesen Ausdruck $= p'$, so hätte man die Formeln:

in 2) $$a = \frac{100r\left(\left[1+\frac{p'}{100}\right]^{mn}-1\right)}{p'\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}}$$

in 3) $$r' = \frac{pr\left(\left[1+\frac{p'}{100}\right]^{mn}-1\right)}{p'\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-1\right)}$$

$$\text{oder } r = \frac{p'r'\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n}-1\right)}{p\left(\left[1+\frac{p'}{100}\right]^{mn}-1\right)}$$

Beispiel. Jemand wünscht eine Jahrrente von 5984 fl., die er 37 Jahre lang am Ende jedes Jahres zu beziehen hat, als Vierteljahrsrente zu erhalten, so daß am Ende jedes Vierteljahres gleichviel bezahlt wird, wie viel gebührt ihm, wenn man 5 Prct. als Zinsfuß zum Grunde legt.

Berechnet man zuerst p', so ist dieß $=$

$$100\left(\sqrt[4]{1{,}05}-1\right) =$$

Denn $\frac{1}{4}\log 1{,}05 = 4\,|\,\frac{0.02119}{0{,}005297} = \log 1{,}0123$

Also $100\,(1{,}0123 - 1) = 1{,}23 = p'$

folglich $\frac{p'}{100} = 0{,}0123$

also $r = \frac{0{,}0123 \,.\, 5984 \,.\, (1{,}05^{37} - 1)}{0{,}05 \,.\, (1{,}0123^{148} - 1)}$

Nun ist $37 \log 1{,}05 = 37 \,.\, 0{,}02119 = 0{,}78400$

Dazu gehört die Zahl 6,0813. Also $1{,}05^{37} - 1 = 5{,}0813$

Ferner ist $148 \log 1{,}0123 = 148 \,.\, 0{,}005298 = 0{,}78410$

Dazu gehört die Zahl 6,0827. Also $1{,}0123^{148} - 1 = 5{,}0827.$

$\log 0{,}0123 = 0{,}08991 - 2$
$\log 5984 = 3{,}77699$
$\log 5{,}0813 = 0{,}70598$
$2{,}57288$

$\log 0{,}05 = 0{,}69897 - 1$
$\log 5{,}0827 = 0{,}70607$
$0{,}40504 - 1$

$\log 1471{,}7 = 3{,}16784$

Es ist also die gesuchte Vierteljahrsrente: 1471,7. Wobei indeß zu bemerken ist, daß wenn 7 zifferige Logarithmen benützt werden, eine größere Genauigkeit des Resultats erreicht wird.

4) Wird die Rente am Anfang jedes Jahres gezahlt (vorschußliche Rente), so ist ihr Endwerth so ersichtlich:

I. II. III. N−1 N

$$r\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2} + \ldots + r\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + r\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Die Summe dieser geometrischen Progression ist:

$$\frac{100\,r\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n - 1\right)}{p}$$

Ist also a die Mise, so hat man:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} = \frac{100\,r\left(\left[1+\frac{p}{100}\right]^n - 1\right)}{p}$$

woraus sich, wenn a gegeben r, wenn r gegeben, a finden läßt. Sind a und r gegeben, so kann man n finden.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Verbesserungen.

S. 8 Z. 9 von unten lies: Unfaßlichkeit statt Umfaßlichkeit.
— 13 = 3 v. u. l. $a < c$ st. $a > c$
— 14 = 11 v. u. l. $b - (b - c) = c$ st. $b(b - c) = c$
— 20 In der Tabelle muß 7 in der sechsten statt in der siebenten Spalte stehen.
— 24 Z. 9 v. u. l. σ st. δ
— 24 Z. 8 v. u. l. γ st. γ
— 25 Z. 3 v. o. l. σ st. δ
— 25 Z. 18 v. o. l. IIII st. IV, VIIII st. IX
— 35 Z. 17 v. u. l. $(a + c + e)$ st. $(a + c + c)$
— 36 Z. 1 v. u. l. $(b + d + f)$ st. $(b + d - f)$
— 49 Z. 9 v. u. l. $c([d - e] - f)$ st. $(c[d - e] - f)$
— 51 Z. 5 v. u. l. $abd + abe$ st. $abd = abe$
— 53 Z. 2 v. u. l. $m < n$ st. $m > n$
— 54 Z. 5 v. u. l. 5.70 st. 6.70
— 58 Z. 1 v. o. l. 7.8.13 st. 7.813
— 58 Z. 9 v. u. l. Nennen st. Nennern.
— 61 Z. 15 v. o. l. AE st. AC
— 70 Z. 18 v. o. l. 7mal genommen 210 giebt, statt 9mal genommen 310 giebt.
— 70 Z. 2 v. u. l. nicht weiter theilbare Zahlen t h e i l b a r ꝛc.
— 78 Z. 12 v. u. lies $179 < a$ statt $179 > a$
— 84 Z. 5 v. u. l. $\frac{3}{21}$ st. $\frac{3}{12}$
— 89 Z. 10 v. u. l. 2.2.2.3.3.5
— 91 Z. 4 v. o. l. 70bcd st. 70cd
— 92 Z. 5 v. o. l. 2.2.2.5 st. 9.2.2.5
— 92 Z. 6 v. o. l. $\frac{73}{120}$ st. $\frac{75}{120}$
— 93 Z. 4 v. u. l. $a - 1 + \frac{n-1}{n}$ st. $a - 1 + \frac{a-1}{n}$
— 94 Z. 12 v. u. l. $-(1\frac{1}{10} + 1\frac{1}{5})$ st. $-1\frac{1}{10} + 1\frac{1}{5})$
— 94 Z. 1 v. u. l. bbcgmn st. bbgmn, bdng st. bdncg
— 96 Z. 4 v. u. l. $\frac{2}{mm-1}$ st. $\frac{1}{mm-1}$
— 101 Z. 12 v. o. l. $\frac{20a}{3m}$ st. $\frac{20a}{2m}$
— 101 Z. 15 v. o. l. bd — bc st. bd — cd
— 106 Z. 3 v. u. ist $\frac{33}{50}$ wegzulassen.
— 107 Z. 1 v. u. l. $(ad + bc)nq$ st. $(ad + bc)np$
— 109 Z. 5 v. o. l. $3n + 2m$ st. $3n + 2n$
— 111 Z. 3 v. o. l. 225mal st. 215mal.
— 114 im Beispiel 8) l. $11\frac{1}{8}a$ st. $11\frac{1}{8}$
— 120 lies: 5,0007 5,0007
50007 statt 5 0007
250035 2 50035
— 122 Z. 15 v. o. l. Stellen st. Nullen
— 132 Z. 7 v. o. l. $\frac{16}{9}$ st. $\frac{19}{6}$

S. 139 Z. 4 v. u. l. $\frac{c}{d} - (a-b)$ ſt. $\frac{c}{d}(a-b)$

— 141 Z. 7 v. o. l. $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$ ſt. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

— 144 Z. 4 v. u. l. 39000400,567 ſt. 39000,400567

— 147 Z. 17 v. u. l. 78 □″ ſt. 78 □′

— 154 Z. 2 v. o. l. 87,9253 □′ ſt. 87,9753 □′

— 165 Z. 1 v. u. l. 3(2c) ſt. (2c)

— 167 Z. 7. v. u. l. A ⩭ 3a ſt. A ⩭ 2a

— 173 Z. 1/4 v. u. l. $a^n > a^m$ ſt. $a > a^m$

— 175 Z. 8. v. o. l. a^{m+1} ſt. a^{m+n}

— 180 Z. 4 v. u. im Beiſpiel 12 lies d^{-4}

— 188 Z. 5 v. o. l. 26 ſt. 27

— 195 Z. 15. v. u. l. Cubikzahl ſt. Quadratzahl.

— 201 Z. 1 v. o. l. Verfahrens ſt. Verſprechens

— 204 Z. 5 v. u. im Beiſpiel 4 l. $\sqrt[3]{3^3 . 2}$ ſt. $\sqrt[3]{3^3 . 3}$

— 207 Z. 1 v. u. l. $c^{\frac{2}{3}}$ ſt. $c^{\frac{2}{3}}$, ferner fehlt zwiſchen beiden Formeln das Zeichen =

— 211 Z. 12 v. u. Beiſpiel 30 l. $x^{\frac{a}{3}} - 3x^{\frac{a}{2}}$ ſt. $x^3 - 3x^2$

— 219 Z. 15 v. o. l. $\log(p \cdot q)$ ſt. $\log(p + q)$

— 265 Z. 3 v. u. l. $\frac{x}{m} = a$ ſt. $\frac{x}{m} = x$

— 268 Z. 11 v. u. Beiſp. 1 l. $(x+n)m$ ſt. $(x+m)n$

— 275 Z. 15 v. o. l. der 2 Ellen breit iſt, wenn 1¾ Ellen ꝛc.

— 293 Z. 16 v. u. l. nach 4, 750 fl. ſt. 1750 fl.

— 321 Z. 3 v. o. l. $(ae - bd) - (ah - bg)$ ſt. $(ae - bd)(ah - bg)$

— 324 Beiſp. 1 l. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$ ſt. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b$; $y = \frac{2}{a - b + c}$

— 324 Z. 8 u. 9 v. u. l. $\frac{2}{7} y$ ſtatt $\frac{7}{2} y$

— 333 Z. 4 v. u. Beiſpiel 1 l. $\pm \sqrt{\frac{4ac + c^2}{4a^2}}$

Fuchs

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hermann, Friedrich Benedict Wilhelm von, 1795-1868

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht

Nürnberg 1845

Math.p. 219 hb
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081986-1